KONKURS MATEMATYCZNY

DLA UCZNIÓW SZKÓŁ GIMNAZJALNYCH

ETAP REJONOWY

KLUCZ ODPOWIEDZI

Zasady przyznawania punktów

- **za każdą poprawną odpowiedź – 1 punkt**
- **za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi – 0 punktów**

Nr zadania		Poprawna odpowiedź
1.		C
2.		C
3.		A
4.		A
5.		C
6.		D
7.		B
8.		C
9.		D
10.		A
11.	A	F
	B	P
	C	F
	D	F
12.	A	P
	B	F
	C	P
	D	P
13.1		$60°$
13.2		$\frac{3}{5}$

Informacja ogólna o ocenianiu zadań otwartych

Niżej zaproponowano opis, za jakie czynności ucznia należy przyznawać kolejne punkty. Opis ma charakter hierarchiczny tj. uczeń otrzymuje wyższą liczbę punktów, jeśli spełnia wymagania zapisane nie tylko przy tej liczbie, ale także wcześniejsze. Równocześnie w całym procesie oceniania trzeba mieć na uwadze, że uczeń może pewne czynności rachunkowe, ale także i heurystyki, czy dedukcje wykonywać w pamięci i bezpośrednio z nich korzystać. W takiej sytuacji należy, zgodnie z holistyczną koncepcją oceniania dopuścić możliwość stosowania skrótów w zapisie i nie obniżać uczniom punktów za rozwiązania, mimo skrótowego zapisu, osoba oceniająca jest w stanie prześledzić cały tok rozumowania dziecka. Np. w zad.16: jeśli uczeń od razu zapisuje różnicę kwadratów właściwych wyrażeń i przekształca ją nie musi wcześniej zapisywać odrębnie każdej z liczb za pomocą stosownego wyrażenia.

Zadanie 14. (0-3)

1 punkt za poprawne obliczenie każdej ze średnich

14.1. $\sqrt{\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}} = \sqrt{4} = 2$

14.2. $\sqrt{\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2+4^2}{2}} = \sqrt{\frac{2+16}{2}} = \sqrt{9} = 3$

14.3. $\frac{2}{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}} = \frac{2}{\frac{4}{6}} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 3$

Zadanie 15. (0-2)

1 pkt – poprawne przekształcenie równania i wyznaczenie zmiennej $b=4a$ lub $a=\frac{1}{4}b$

2 pkt – podstawienie wyznaczonej zmiennej do wyrażenia $\frac{5b}{a+b}$ i wyznaczenie jego wartości

Przykładowe rozwiązanie

$5a = a+b$

$4a = b$

$\frac{5b}{a+b} = \frac{5\cdot 4a}{a+4a}$

$\frac{5b}{a+b} = \frac{5\cdot 4a}{a+4a} = \frac{20a}{5a} = 4$

lub

$a = \frac{1}{4}b$

$\frac{5b}{\frac{1}{4}b+b} = \frac{5b}{\frac{5}{4}b} = \frac{20b}{5b} = 4$

Zadanie 16. (0-3)
1 pkt – zauważenie, że liczby parzyste niepodzielne przez 4 przy dzieleniu przez 4 dają resztę 2 wraz z zapisem tych liczb w postaci $4n + 2$ i $4k + 2$
2 pkt – zapisanie różnicy kwadratów tych liczb i poprawne zastosowanie wzorów skróconego mnożenia
3 pkt – poprawne przekształcenie otrzymanego wyrażenia do postaci będącej iloczynem liczby lub liczb całkowitych przez 16

Przykładowe rozwiązanie

$a = 4n + 2$ i $n \in N$
$b = 4k + 2$ i $k \in N$
$a^2 - b^2 = (4n+2)^2 - (4k+2)^2$
$a^2 - b^2 = (4n+2)^2 - (4k+2)^2 = 16n^2 + 16n + 4 - 16k^2 - 16k - 4 = 16(n^2 + n - k^2 - k) = 16m$
i $m \in C$
lub
$a^2 - b^2 = (4n+2)^2 - (4k+2)^2 = (4n+2+4k+2)(4n+2-4k-2) = (4n+4k+4)(4n-4k) =$
$= 16(n+k+1)(n-k) = 16m$
$m \in C$

Zadanie 17. (0-4)
1 pkt – oznaczenie zmiennych i zapisanie wyrażeń opisujących wiek Kasi i Basi w przeszłości lub w przyszłości
2 pkt – zapisanie wyrażeń opisujących wiek Kasi i Basi w przeszłości i w pryszłości
3 pkt – zapisanie równań opisujących prawidłowe zależności między zapisanymi wcześniej wyrażeniami
4 pkt – poprawne rozwiązanie układu równań i obliczenie wieku Kasi i Basi

Przykładowe rozwiązanie
k – wiek Kasi obecnie
b – wiek Basi obecnie
k – *b* – różnica wieku Kasi i Basi

	w przeszłości	obecnie	w przyszłości
wiek Kasi	b	k	$k + (k - b) = 2k - b$
wiek Basi	$b - (k - b) = 2b - k$	b	k

Równania opisujące warunki zadania:
$k = 3(2b - k)$ i $2k - b + k = 42$
$k = 6b - 3k$ $\quad$ $3k - b = 42$
$4k = 6b$
$k = \frac{3}{2}b$
$$\begin{cases} k = \frac{3}{2}b \\ 3k - b = 42 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k = \frac{3}{2}b \\ \frac{9}{2}b - b = 42 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k = \frac{3}{2}b \\ \frac{7}{2}b = 42 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k = 18 \\ b = 12 \end{cases}$$

Odpowiedź: Kasia ma 18 lat, a Basia 12 lat.

Zadanie 18. (0-4)

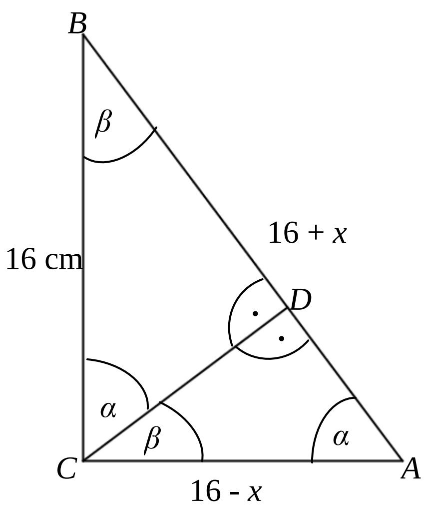
1 pkt – wykonanie rysunku, wprowadzenie niewiadomej i prawidłowe opisanie długości boków trójkąta, zapisanie równania z zastosowaniem twierdzenia Pitagorasa

2 pkt – poprawne rozwiązanie zapisanego równania i obliczenie długości pozostałych boków trójkąta prostokątnego

3 pkt – zauważenie, że dwa trójkąty, na które wysokość podzieliła dany trójkąt prostokątny są podobne do siebie i do wyjściowego trójkąta wraz z zastosowaniem własności podobieństwa do ułożenia odpowiednich proporcji (I sposób), lub obliczenie wysokości z porównania pól i skorzystanie z tw. Pitagorasa (II sposób) lub inne konfiguracje wykorzystania wymienionych własności (np. wyznaczenie wysokości z podobieństwa, a długości szukanych odcinków z tw. Pitagorasa)

4 pkt – poprawne wyznaczenie długości obu szukanych odcinków

Przykładowe rozwiązanie



Z twierdzenia Pitagorasa

$$(16 + x)^2 = (16 - x)^2 + 16^2$$

$$16^2 + 32x + x^2 = 16^2 - 32x + 16^2 + 16^2$$

$64x = 16^2$
$x = 4$ (cm)
Długości boków trójkąta prostokątnego ABC mają długości: 12 cm, 16 cm i 20 cm.

I sposób

$\alpha + \beta = 180^\circ$
Trójkąty ABC, CAD i BCD są podobne
Z podobieństwa trójkątów ABC i CAD

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|AD|}{|AB|}$$

$$\frac{12}{20} = \frac{|AD|}{12}$$

$20|AD| = 144$

$|AD| = 7{,}2$ (cm)

Z podobieństwa trójkątów ABC i BCD lub $|BD| = |AB| - |AD|$

$$\frac{|BC|}{|AB|} = \frac{|BD|}{|BC|}$$

$|BD| = 20 - 7{,}2 = 12{,}8$ (cm)

$$\frac{16}{20} = \frac{|BD|}{16}$$

$20|AD| = 256$

$|AD| = 12{,}8$ (cm)

II sposób

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BC|$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16 = 96 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |CD|$$

$$96 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot |CD|$$

$$|CD| = 9{,}6 = 9\frac{3}{5} = \frac{48}{5} \text{ (cm)}$$

Z twierdzenia Pitagorasa

$|AC|^2 = |AD|^2 + |CD|^2$ lub $|BC|^2 = |BD|^2 + |CD|^2$

Rozwiązanie na ułamkach zwykłych

$$12^2 = |AD|^2 + \left(\frac{48}{5}\right)^2 \qquad 16^2 = |BD|^2 + \left(\frac{48}{5}\right)^2$$

$$|CD|^2 = 144 - \frac{2304}{25} \qquad |BD|^2 = 256 - \frac{2304}{25}$$

$|CD|^2 = \frac{3600}{25} - \frac{2304}{25}$

$|CD| = \sqrt{\frac{1296}{25}}$

$|CD| = \frac{36}{5} = 7\frac{1}{5}$ (cm)

$|BD|^2 = \frac{6400}{25} - \frac{2304}{25}$

$|BD| = \sqrt{\frac{4096}{25}}$

$|BD| = \frac{64}{5} = 12\frac{4}{5}$ (cm)

Rozwiązanie na ułamkach dziesiętnych

$12^2 = |CD|^2 + 9{,}6^2$

$|CD|^2 = 144 - 92{,}16$

$|CD|^2 = 51{,}84$

$|CD| = \sqrt{51{,}84}$

$|CD| = 7{,}2$ (cm)

$|BD| = 20 - 7{,}2 = 12{,}8$ (cm)

$16^2 = |BD|^2 + 9{,}6^2$

$|BD|^2 = 256 - 92{,}16$

$|BD|^2 = 163{,}84$

$|BD| = \sqrt{163{,}84}$

$|BD| = 12{,}8$ (cm)

$|CD| = 20 - 12{,}8 = 7{,}2$ (cm)

Odcinki, na jakie dzieli przeciwprostokątną, wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego, mają długości 7,2 cm i 12,8 cm.

Uwaga!. Jeśli dziecko wybierze tę metodę, to ze względu na to, że nie może używać kalkulatora uznajemy wyniki $\sqrt{51{,}84}$ *i* $\sqrt{51{,}84}$ *za poprawne. W przypadku stosowania obliczeń na ułamkach zwykłych wyniki* $\frac{\sqrt{1296}}{5}$ i $\frac{\sqrt{4096}}{5}$ *uznajemy za poprawne.*

Zadanie 19. (0-4)

1 pkt – zaznaczenie na rysunku promieni koła prostopadłych do promieni wycinka koła i zauważenie (uczeń nie musi tego uzasadniać), że odpowiednie trójkąty są prostokątne i przystające (na rysunku trójkąty *OSB* i *OSC*)

2 pkt – zauważenie, że |O*S*| = 2*r* i trójkątów szczególnych oraz wyznaczenie miary kąta *SOB* (lub *SOC*)

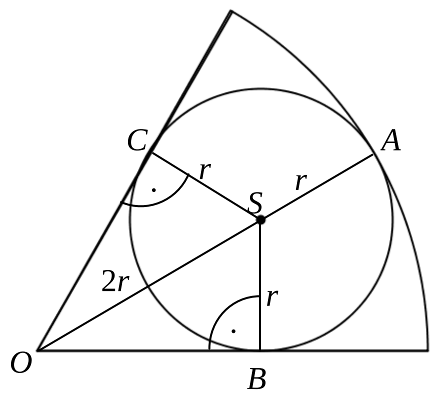
3 pkt – zastosownie poprawnych wzorów (metod) do obliczenia pola wycinka kołowego i pola koła

4 pkt – poprawne wyznaczenie stosunku pola wycinka kołowego do pola koła

Przykładowe rozwiązanie

r – promień koła

3*r* – promień wycinka koła



OA - promień wycinka koła, SA – promień koła, stąd

$|OS| = 3r - r = 2r$

Punkty B i C to punkty styczności koła z promieniami wycinka koła.
Trójkąty OSB i OSC są prostokątne i przystające (przykładowe uzasadnienie: S jest jednakowo oddalony od ramion kąta, więc półprosta OS jest dwusieczną kąta BOC, nie jest wymagane od ucznia).
Przyprostokątna SB jest dwa razy krótsza od przeciwprostokątnej OS, stąd $|\angle SOB| = 30^\circ$.

Zatem kąt środkowy wycinka koła ma miarę 60°.
P_1 – pole wycinka koła
P_2 – pole koła

$$P_1 = \frac{1}{6}\pi(3r)^2 = \frac{1}{6}\pi \cdot 9r^2 = \frac{3}{2}\pi r^2$$

$$P_2 = \pi r^2$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\frac{3}{2}\pi r^2}{\pi r^2} = \frac{3}{2}$$

Odpowiedź: Stosunek pola wycinka kołowego do pola koła jest równy $\frac{3}{2}$.