KONKURS Z MATEMATYKI

DLA UCZNIÓW SZKÓŁ PODSTAWOWYCH

ETAP REJONOWY

KLUCZ ODPOWIEDZI

Zasady przyznawania punktów

- **za każdą poprawną odpowiedź – 1 punkt**
- **za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi – 0 punktów**

Nr zadania		Poprawna odpowiedź
1.		D
2.		A
3.		D
4.		C
5.		D
6.		B
7.		D
8.		B
9.		C
10.		B
11.	A	P
	B	P
12.	A	F
	B	F
	C	P
13.1		(4, 3)
13.2		(–2, 3)
13.3		(–2, 1)
13.4		16
14.1		1 pkt za wszystkie poprawne uzupełnienia $\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{5}-\frac{1}{6}$ $\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{11}=\frac{1}{10}-\frac{1}{11}$ $\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

Informacja ogólna o ocenianiu zadań otwartych

Niżej zaproponowano opis, za jakie czynności ucznia należy przyznawać kolejne punkty. Opis ma charakter hierarchiczny tj. uczeń otrzymuje wyższą liczbę punktów, jeśli spełnia wymagania zapisane nie tylko przy tej liczbie, ale także wcześniejsze. Równocześnie w całym procesie oceniania trzeba mieć na uwadze, że uczeń może pewne czynności rachunkowe, ale także i heurystyki, czy dedukcje wykonywać w pamięci i bezpośrednio z nich korzystać. W takiej sytuacji należy, zgodnie z holistyczną koncepcją oceniania dopuścić możliwość stosowania skrótów w zapisie i nie obniżać uczniom punktów za rozwiązania, mimo skrótowego zapisu, osoba oceniająca jest w stanie prześledzić cały tok rozumowania dziecka. Np. w zad.15: jeśli uczeń od razu zapisuje prawidłowe równanie nie musi wcześniej zapisywać odrębnie każdej z liczb, o których mowa w zadaniu za pomocą stosownego wyrażenia.

Zadanie 14.2. (0-2)

1 pkt – poprawne zapisanie iloczynów za pomocą różnic

2 pkt – redukcja liczb przeciwnych i poprawne obliczenie wartości wyrażenia

Przykładowe rozwiązanie

$$1\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2018}\cdot\frac{1}{2019}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots.+\frac{1}{2017}-\frac{1}{2018}+\frac{1}{2018}-\frac{1}{2019}$$

$$1-\frac{1}{2019}=\frac{2018}{2019}$$

Zadanie 15. (0-4)

1 pkt – poprawne zapisanie wyrażenia algebraicznego opisującego liczbę, którą otrzymamy po dopisaniu cyfry 5 na początku liczby *a* <u>lub</u> wyrażenia algebraicznego opisującego liczbę, którą otrzymamy po dopisaniu cyfry 5 na końcu liczby *a*

2 pkt – poprawne zapisanie obydwu ww. wyrażeń algebraicznych

3 pkt – poprawne ułożenie równania

4 pkt – poprawne rozwiązanie równania i wyznaczenie liczby *a*

Przykładowe rozwiązanie

$500 + a$ – liczba, którą otrzymamy po dopisaniu cyfry 5 na początku liczby *a*

$10a + 5$ – liczba, którą otrzymamy po dopisaniu cyfry 5 na końcu liczby *a*

$10a + 5 - (500 + a) = 234$

$10a + 5 - 500 - a = 234$

$9a = 729$

$a = 81$

Odpowiedź: Szukana liczba dwucyfrowa *a* to 81.

Zadanie 16. (0-4)

1 pkt – obliczenie miar kątów, na jakie odcinek *AD* dzieli kąt prosty (30° i 60°)

2 pkt – zauważenie, że trójkąt *ABD* jest równoboczny a jego bok ma długość 4 cm <u>lub</u> zauważenie, że trójkąt *ADC* jest równoramienny a jego ramiona mają długość 4 cm

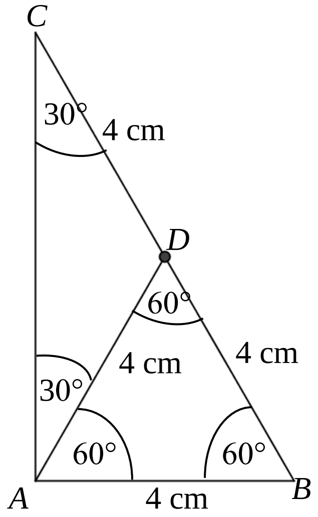
3 pkt – zauważenie, że trójkąt *ABD* jest równoboczny a jego bok ma długość 4 cm <u>i</u> zauważenie, że trójkąt *ADC* jest równoramienny a jego ramiona mają długość 4 cm

4 pkt – obliczenie długości przeciwprostokątnej *BC* (8 cm)

Przykładowe rozwiązanie

$90^{\circ} : 3 = 30^{\circ}$

Zatem odcinek *AD* dzieli kąt prosty na kąty o miarach 30° i 60°, przy czym miara kąta *DAB* jest równa 60°, miara kąta *CAD* jest równa 30°.



Kąty przy podstawie *AB* trójkąta *ABD* mają miary po 60°, czyli kąt przy wierzchołku *D* ma również miarę 60° (wynika to z twierdzenia o sumie miar kątów wewnętrznych trójkąta).
Trójkąt *ABD* jest równoboczny, a więc $|AD| = |AB| = |BD| = 4\,\text{cm}$

W trójkącie *ABC* kąt przy wierzchołku *C* ma miarę 30° (bo 90° - 60° = 30°). Kąt *CAD* ma również miarę 30°, czyli trójkąt *ADC* jest równoramienny, a więc $|AD| = |CD| = 4\,\text{cm}$.

Zatem długość przeciwprostokątnej *BC*:
|*BC*| = |*BD*| + |*DC*| = 4 cm + 4 cm = 8 cm.

Zadanie 17. (0-4)

1 pkt – wykonanie pełnego rysunku z zaznaczonym punktem *S* w środku odcinka *AB* – nie wymagamy ani konstrukcji ani współrzędnych punktu S lub sporządzenie niekompletnego rysunku z zaznaczonym punktem S i wyznaczonymi jego współrzędnymi
2 pkt – obliczenie długości promienia okręgu O_1 (lub kwadratu długości promienia) lub długości promienia okręgu O_2 (lub kwadratu długości promienia)
3 pkt – obliczenie długości obu promieni (lub ich kwadratów)
4 pkt – obliczenie pola pierścienia kołowego wyznaczonego przez okręgi O_1 i O_2

Przykładowe rozwiązanie

$$S = \left(\frac{-2+4}{2}, \frac{-1+5}{2} \right) = (1, 2)$$

r_1 – promień okręgu O_1
r_2 – promień okręgu O_2

$r_1 = 3\sqrt{2}$ (przekątna kwadratu o boku długości 3) lub z zastosowaniem twierdzenia Pitagorasa

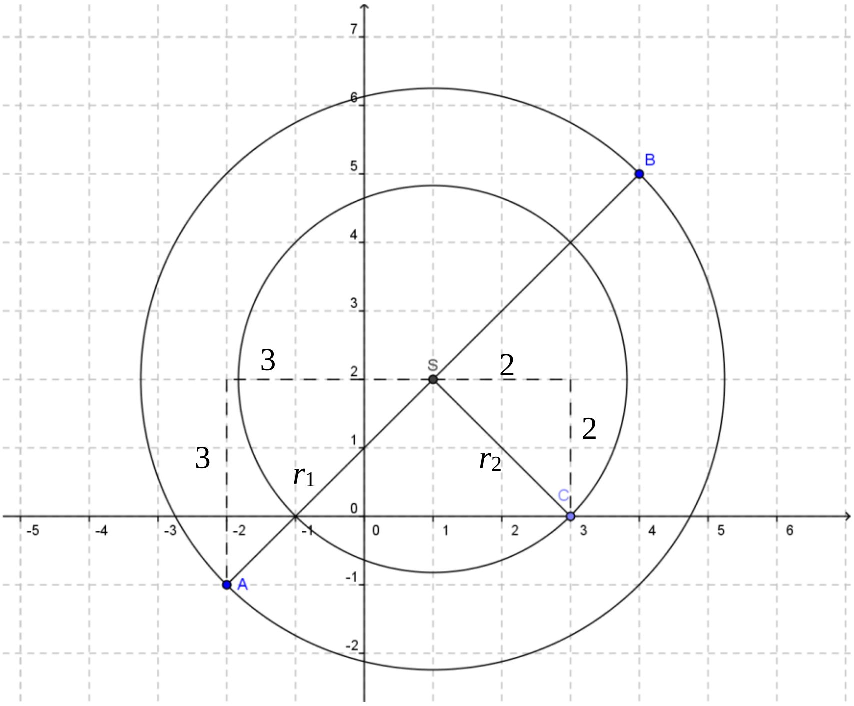
$r_1^{\,2} = 3^2 + 3^2 \quad r_1^{\,2} = 18 \quad r_1 = 3\sqrt{2}$

$r_2 = 2\sqrt{2}$ (przekątna kwadratu o boku długości 2) lub z zastosowaniem twierdzenia Pitagorasa

$r_2^{\,2} = 2^2 + 2^2 \quad r_2^{\,2} = 8 \quad r_2 = 2\sqrt{2}$

P – pole pierścienia kołowego

$P = \pi r_1^2 - \pi r_2^2 = \pi(r_1^2 - r_2^2)$ $P = \pi(18-8) = 10\pi$



Odpowiedź: Pole pierścienia kołowego jest równe 10π.

Zadanie 18. (0-6)

I część zadania

1 pkt – wykonanie odpowiedniego rysunku i zauważenie, że kąty *CAB* i *DCA* są naprzemianległe zatem mają równe miary

2 pkt – zauważenie, że trójkąt *ACD* ma te same kąty przy podstawie *AC*, więc jest równoramienny

3 pkt – obliczenie obwodu trapezu *ABCD*

II część zadania

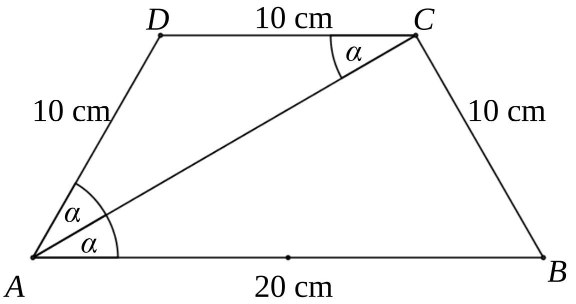
4 pkt – poprowadzenie odcinka *CE* równoległego do ramienia *AD* i zauważenie, że punkt *E* jest środkiem podstawy *AB* (I sposób) lub poprowadzenie wysokości w trapezie i wyznaczenie długości odcinków *x* (II sposób)

5 pkt – zauważenie, że trójkąt *EBC* jest równoboczny (I sposób) lub zauważenie, że trójkąty prostokątne utworzone po obu stronach trapezu przez wysokość, odcinek *x* i ramię trapezu są szczególne i mają kąty ostre o miarach 60° i 30°

6 pkt – podanie miary kąta ostrego trapezu *ABCD*

Przykładowe rozwiązanie

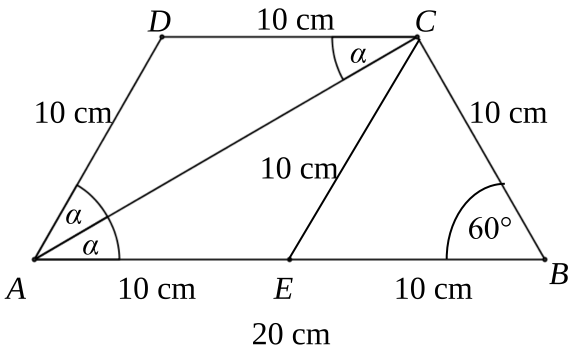
Pierwsza część zadania



Kąty *CAB* i *DCA* to kąty naprzemianległe, czyli mają równe miary.
Trójkąt *ACD* jest równoramienny, stąd ramiona tego trapezu mają długość 10 cm.
Obwód trapezu *ABCD* jest równy 20 cm + 3 · 10cm = 50 cm.

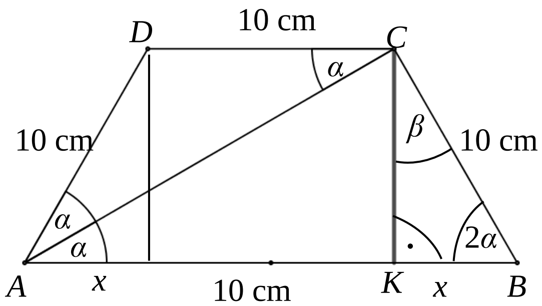
Druga część zadania i jej dwa przykładowe rozwiązania

I sposób



Odcinek *CE* jest równoległy do ramienia *AD*, czworokąt *AECD* jest rombem o boku długości 10 cm. Czyli punkt *E* jest środkiem podstawy *AB*.
Trójkąt *EBC* jest równoboczny, czyli miara kąta ostrego trapezu *ABCD* jest równa 60°.

II sposób



Z wierzchołków *C* i *D* prowadzimy wysokości trapezu *ABCD*.

$x = \frac{20-10}{2} = 5\,(\text{cm})$

W trójkącie prostokątnym *KBC* przyprostokątna *KB* jest dwa razy krótsza od przeciwprostokątnej *BC*, czyli $\beta = 30^\circ$, stąd $2\alpha = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.
Kąt ostry trapezu ma miarę 60°.