KONKURS MATEMATYCZNY

DLA UCZNIÓW SZKÓŁ GIMNAZJALNYCH

ETAP WOJEWÓDZKI

KLUCZ ODPOWIEDZI

Zasady przyznawania punktów

- **za każdą poprawną odpowiedź – 1 punkt**
- **za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi – 0 punktów**

Nr zadania	Poprawna odpowiedź
1.	C
2.	D
3.	C
4.	B
5.	D
6.	B
7.	B
8.	D
9.	A
10.	D

Informacja ogólna o ocenianiu zadań otwartych

Niżej zaproponowano opis, za jakie czynności ucznia należy przyznawać kolejne punkty. Opis ma charakter hierarchiczny tj. uczeń otrzymuje wyższą liczbę punktów, jeśli spełnia wymagania zapisane nie tylko przy tej liczbie, ale także wcześniejsze. Równocześnie w całym procesie oceniania trzeba mieć na uwadze, że uczeń może pewne czynności rachunkowe, ale także i heurystyki, czy dedukcje wykonywać w pamięci i bezpośrednio z nich korzystać. W takiej sytuacji należy, zgodnie z holistyczną koncepcją oceniania dopuścić możliwość stosowania skrótów w zapisie i nie obniżać uczniom punktów za rozwiązania, mimo skrótowego zapisu, osoba oceniająca jest w stanie prześledzić cały tok rozumowania dziecka.

Intencją autora było zbudowanie na etap wojewódzki takiego zestawu zadań, który umożliwi Państwu wyłonienie naprawdę najlepszych młodych matematycznych umysłów w województwie. Aby tak się stało, w ocenianiu prac uczniów trzeba przede wszystkim doceniać dobre pomysły i sprytne strategie oraz niestandardową wiedzę uczniów. Uczniowie na etapie wojewódzkim nie powinni tracić punktów za drugorzędne usterki w zapisie, jeśli ich prace zawierają poprawne, choć niekiedy niedbale zapisane rozwiązania. Warto pamiętać, że wielu świetnych matematyków to osoby z dysleksją/ dysgrafią, które to dysfunkcje sprawiają, że zapis *ich rozwiązań jest niestaranny, czasem mało czytelny. Jednak autorami takich trudnych do oceny prac mogą być bardzo zdolni uczniowie.*

Opracowany niżej schemat oceny prac uczniów zawiera takie przykładowe rozwiązania zadań, które nie wykraczają poza zakres materiału podany w wymaganiach konkursowych. Należy jednak pamiętać, że niektóre z tych zadań można rozwiązywać metodami, które opierają się na treściach podstawy programowej szkoły średniej lub wręcz wykraczają ponad całą obowiązkową wiedzę szkolną. Na przykład zadanie 12 można rozwiązywać za pomocą kongruencji, a zadanie 17 z użyciem twierdzenia sinusów lub cosinusów. Oczywiście należy uznać takie rozwiązania o ile są poprawne, a w sytuacji, gdy są częściowo poprawne decyzję, jak taką nietypową pracę ocenić, warto podejmować w szerszym gronie.

Zadanie 11. (0-3)

1 pkt – poprawne przekształcenie wyrażenia $\sqrt{6+4\sqrt{2}}$ do postaci $2+\sqrt{2}$ lub wyrażenia $\sqrt{3-\sqrt{8}}$ do postaci $\sqrt{2}-1$ (I sposób) lub obustronne podniesienie do kwadratu, w tym prawidłowe zastosowanie wzoru na kwadrat różnicy (II sposób)
2 pkt – poprawne przekształcenie obu wyrażeń (I sposób) lub prawidłowo wykonane mnożenie pierwiastków
3 pkt – poprawne przekształcenie otrzymanej różnicy (I sposób) lub doprowadzenie do postaci L=P (II sposób)

Przykładowe rozwiązanie

I sposób

$\sqrt{6+4\sqrt{2}}=\sqrt{4+4\sqrt{2}+2}=\sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)^2}=2+\sqrt{2}$

$\sqrt{3-\sqrt{8}}=\sqrt{2-2\sqrt{2}+1}=\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}=\sqrt{2}-1,\quad \sqrt{2}-1>0$

$\sqrt{6+4\sqrt{2}}-\sqrt{3-\sqrt{8}}=2+\sqrt{2}-\left(\sqrt{2}-1\right)=2+\sqrt{2}-\sqrt{2}+1=3$

II sposób
Metoda równoważnego przekształcania tezy

$\sqrt{6+4\sqrt{2}}-\sqrt{3-\sqrt{8}}=3$ podnosimy obie strony równania do kwadratu
(liczby dodatnie są równe wtedy i tylko wtedy, gdy ich kwadraty są równe)

$6+4\sqrt{2}+3-2\sqrt{2}-2\sqrt{6+4\sqrt{2}}\cdot\sqrt{3-2\sqrt{2}}=9$

$9+2\sqrt{2}-2\sqrt{18-6\cdot 2\sqrt{2}+12\sqrt{2}-16}=9$

$9+2\sqrt{2}-2\sqrt{2}=9$

$9=9$ c. n. u.

Zadanie 12. (0-3)

1 pkt – poprawne przekształcenie podanej różnicy do postaci: $\left(3^{32}-1\right)\left(3^{32}+1\right)$ - zastosowanie wzoru na różnicę kwadratów dwóch wyrażeń
2 pkt – poprawne przekształcenie do postaci $\left(3^4-1\right)\left(3^4+1\right)\left(3^8+1\right)\left(3^{16}+1\right)\left(3^{32}+1\right)$
3 pkt – zapisanie wyrażenia w postaci 80*n* (bez konieczności wprowadzania *n*, wystarczy, że uczeń zapisze iloczyn liczby 80 i czterech poprawnie zapisanych sum w nawiasach)

Przykładowe rozwiązanie

$3^{64}-1=\left(3^{32}-1\right)\left(3^{32}+1\right)=\left(3^{16}-1\right)\left(3^{16}+1\right)\left(3^{32}+1\right)=\left(3^8-1\right)\left(3^8+1\right)\left(3^{16}+1\right)\left(3^{32}+1\right)=$

$=\left(3^4-1\right)\left(3^4+1\right)\left(3^8+1\right)\left(3^{16}+1\right)\left(3^{32}+1\right)=80n$

$n=\left(3^4+1\right)\left(3^8+1\right)\left(3^{16}+1\right)\left(3^{32}+1\right)$

Zadanie 13. (0-4)

1 pkt – poprawne uzupełnienie obu luk lub poprawne rozwiązanie trzech równań

2 pkt – poprawne uzupełnienie obu luk i poprawne rozwiązanie trzech równań

3 pkt – rozwiązanie równania w postaci ogólnej (do postaci $x=\frac{a^2-b^2}{a-b}$)

4 pkt – pełne rozwiązanie równania, z uzyskaniem wyniku $x=a+b$

Przykładowe rozwiązanie

a) $ax+b^2=bx+a^2$

b)

I

$3x+4=2x+9$
$3x-2x=9-4$
$x=5$

II

$0{,}5x+0{,}01=0{,}1x+0{,}25$
$0{,}5x-0{,}1x=0{,}25-0{,}01$
$0{,}4x=0{,}24$
$x=0{,}6$

III

$-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{9}$
$-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}x=\frac{4}{9}-\frac{1}{9}$
$-\frac{1}{3}x=\frac{4}{9}-\frac{1}{9}$
$-\frac{1}{3}x=\frac{1}{3}$
$x=-1$

c)

$ax+b^2=bx+a^2$
$ax-bx=a^2-b^2$
$x(a-b)=a^2-b^2$
$x=\frac{a^2-b^2}{a-b}$
$x=\frac{(a-b)(a+b)}{a-b}$
$x=a+b$

Zadanie 14. (0-3)

1 pkt – zapisanie jednego wyrażenia opisującego dochód ze sprzedaży biletów po obniżce ceny biletu ($1{,}75xy$ lub $1{,}4\cdot 25x$)

2 pkt – zapisanie równości dwóch wyrażeń opisujących dochód ze sprzedaży biletów po obniżce ceny biletu

3 pkt – obliczenie ceny biletu po obniżce

Przykładowe rozwiązanie

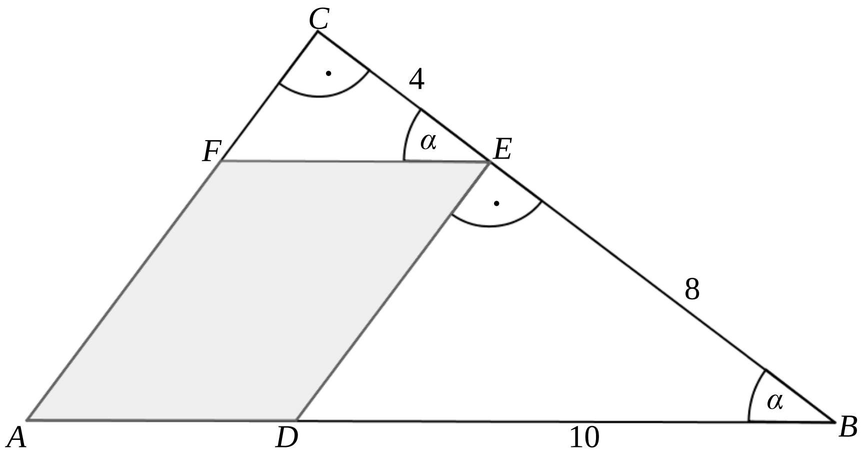
x – liczba widzów przed obniżką ceny biletu
$25x$ – zysk ze sprzedaży biletów przed obniżką ceny biletu (zł)
y – cena biletu po obniżce (zł)
$1{,}75xy$ – zysk ze sprzedaży biletów po obniżce ceny biletu (zł)
$1{,}4\cdot 25x$ – zysk ze sprzedaży biletów po obniżce ceny biletu (zł)

$1{,}75xy=1{,}4\cdot 25x$
$1{,}75xy=35x$
$y=20\,(\text{zł})$

Odpowiedź: Bilet po obniżce kosztował 20 zł.

Zadanie 15. (0-4)
1 pkt – obliczenie długości odcinka *DE* (zastosowanie twierdzenia Pitagorasa)
2 pkt – obliczenie długości odcinka *AD* (skorzystanie z podobieństwa trójkątów *FEC* i *DBE* - I sposób lub z twierdzenia Talesa – II sposób) lub obliczenie pola trójkąta DBE
3 pkt – obliczenie długości odcinka *AD* i obliczenie pola trójkąta *DBE*
lub
obliczenie długości odcinka *AD* i obliczenie obwodu równoległoboku *ADEF*
4 pkt – obliczenie pola trójkąta *DBE* i obliczenie obwodu równoległoboku *ADEF*

Przykładowe rozwiązanie
$AB \parallel EF$, czyli kąty *ABC* i *FEC* mają równe miary (kąty odpowiadające).



I sposób
Z twierdzenia Pitagorasa

$$|DE|^2 = 10^2 - 8^2$$

$$|DE| = 6$$

$$P_{\Delta DBE} = \frac{1}{2} \cdot |DE| \cdot |BE|$$

$$P_{\Delta DBE} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$$

Pole trójkąta *DBE* jest równe 24

Trójkąt *FEC* jest podobny do trójkąta *DBE* w skali $\frac{|CE|}{|BE|} = \frac{1}{2}$, stąd

$$|EF| = 5$$

$$|AD| = |EF| = 5$$

Obwód równoległoboku *ADEF* jest równy 2 · 6 + 2 · 5 = 22

II sposób
$AC \parallel DE$
Z twierdzenia Talesa

$$\frac{|BE|}{|CE|} = \frac{|BD|}{|AD|}$$

$$\frac{8}{4} = \frac{10}{|AD|}$$

$|AD| = 5$

$|DE|^2 = 10^2 - 8^2$

$|DE| = 6$

$P_{\Delta DBE} = \frac{1}{2} \cdot |DE| \cdot |BE|$

$P_{\Delta DBE} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$

Pole trójkąta *DBE* jest równe 24
Obwód równoległoboku *ADEF* jest równy $2 \cdot 6 + 2 \cdot 5 = 22$

Zadanie 16. (0-5)
1 pkt – wykonanie odpowiedniego rysunku (prostokąt z przekątną i dwa okręgi wpisane w powstałe trójkąty)
2 pkt – obliczenie długości drugiego boku prostokąta
3 pkt – obliczenie długości pomienia okręgu wpisanego w trójkąt
4 pkt – poprawna metoda obliczenia odległości między środkami okręgów (zastosowanie twierdzenia Pitagorasa)
5 pkt – rozwiązanie pełne, poprawne rachunkowo

Przykładowe rozwiązanie

a – długość drugiego boku prostokąta
z twierdzenia Pitagorasa

$a^2 + 12^2 = 13^2$

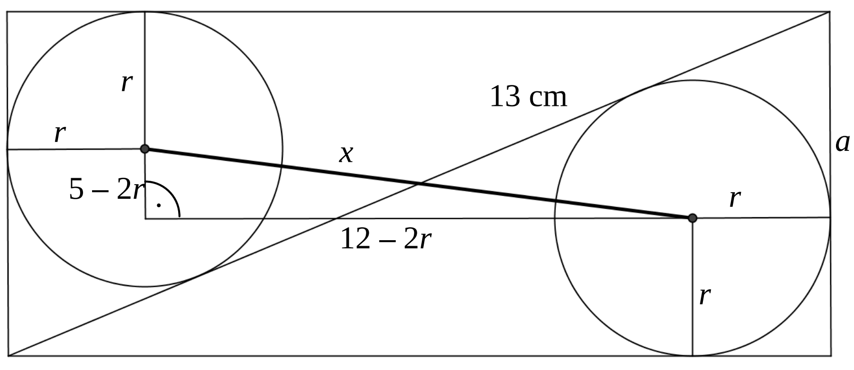
$a^2 = 25$

$a = 5$ (cm)

r – promień okręgu

$r = \frac{5+12-13}{2} = 2\,(\text{cm})$ lub $r = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12}{5+12+13} = \frac{60}{30} = 2\,(\text{cm})$

I sposób

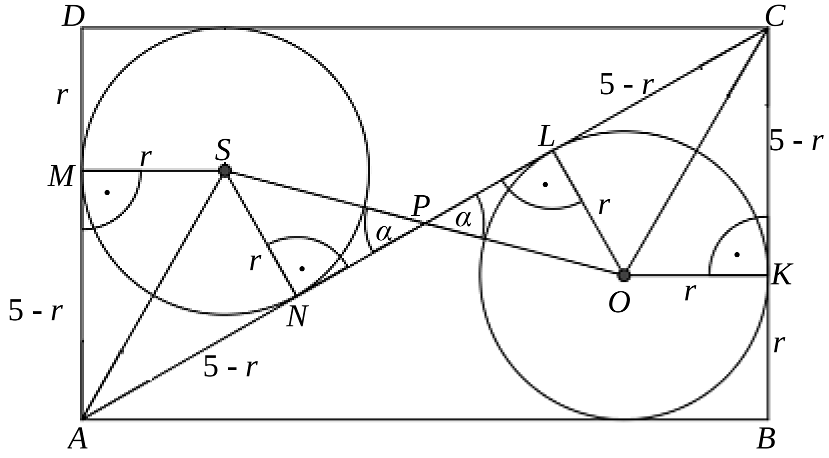


x – odległość między środkami okręgów
x – długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego o przyprostokatnych długości $5 - 2r$ i $12 - 2r$

$5 - 2r = 5 - 2 \cdot 2 = 1$ (cm)

$12 - 2r = 12 - 2 \cdot 2 = 8$ (cm)
z twierdzenia Pitagorasa
$x^2 = 1^2 + 8^2$
$x^2 = 65$
$x = \sqrt{65}$ (cm)
Odpowiedź: Odległość między środkami okręgów jest równa $\sqrt{65}$ cm.

II sposób



$|CK| = |CL| = 5 - r = 3$ (cm) (z twierdzenia o stycznej lub z przystawania trójkątów OKC i OCL)
analogicznie
$|AN| = |AM| = 5 - r = 3$ (cm) (z twierdzenia o stycznej lub z przystawania trójkątów ANS i ASM)
Trójkąty SNP i PLO są przystające, zatem $|SP| = |OP|$

$|NL| = 13 - 2 \cdot (5 - r)$

$|NL| = 13 - 2 \cdot 3 = 7$ (cm)

z twierdzenia Pitagorasa

$|SP|^2 = 2^2 + 3{,}5^2$

$|SP|^2 = 16{,}25$

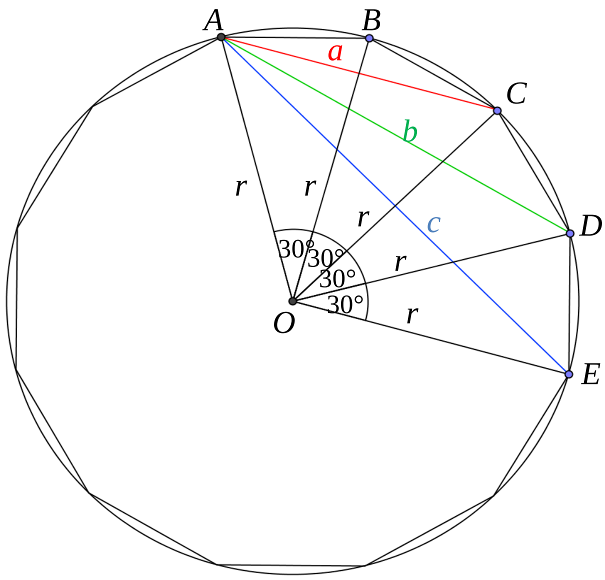
$|SP| = \sqrt{16\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{65}{4}} = \frac{\sqrt{65}}{2}$ (cm)

$|OS| = 2 \cdot |SP| = 2 \cdot \frac{\sqrt{65}}{2} = \sqrt{65}$ (cm)

Odpowiedź: Odległość między środkami okręgów jest równa $\sqrt{65}$ cm.

Zadanie 17. (0-5)
1 pkt – obliczenie miary kąta środkowego utworzonego przez dwa promienie wyznaczające końce jednego boku dwunastokąta foremnego
2 pkt – obliczenie długości jednej przekątnej
3 pkt –obliczenie długości dwóch przekątnych
4 pkt –obliczenie długości trzech przekątnych
5 pkt – zastosowanie twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa do uzasadnienia tezy

Przykładowe rozwiązanie
Dwunastokąt foremny zbudowany jest z 12 przystających trójkątów równoramiennych o kącie między ramionami o mierze $\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$.



Trójkąt *AOC* jest równoboczny, czyli $a = r$.
Trójkąt *AOD* jest prostokątny równoramienny, czyli $b = r\sqrt{2}$.
Przekątna *AE* o długości *c* jest przekątną rombu *AOEC* zbudowanego z dwóch trójkątów równobocznych o bokach długości *r*, czyli $c = r\sqrt{3}$.

$$a^2 + b^2 = r^2 + \left(r\sqrt{2}\right)^2 = r^2 + 2r^2 = 3r^2$$

$$c^2 = \left(r\sqrt{3}\right)^2 = 3r^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Zatem, na podstawie twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa, trójkąt o bokach długości *a*, *b* i *c* jest prostokątny.

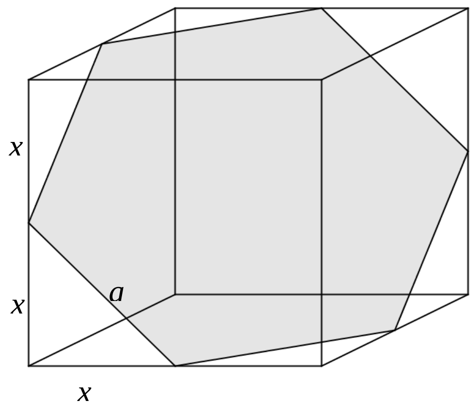
Zadanie 18. (0-3)

1 pkt – poprawna metoda obliczenia długości boku sześciokąta

2 pkt – poprawna metoda obliczenia długości krawędzi sześcianu

3 pkt – rozwiązanie pełne, poprawne rachunkowo

Przykładowe rozwiązanie



Sześciokąt przedstawiony na rysunku jest foremny.
a – długość boku sześciokąta
x – połowa długości krawędzi sześcianu

$P_{sz} = 27\sqrt{3}$

$P_{sz} = 6 \cdot P_{\Delta}$

$P_{\Delta} = \frac{27\sqrt{3}}{6} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$

$P_{\Delta} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$

$a^2 = 18$

$a = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ (cm)

a – przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości x
$x = 3$(cm)

lub z twierdzenia Pitagorasa

$x^2 + x^2 = a^2$

$x^2 + x^2 = (3\sqrt{2})^2$

$2x^2 = 18$

$x^2 = 9$

$x = 3$ (cm)

Długość krawędzi sześcianu jest równa $2 \cdot 3$ cm $= 6$ cm