KONKURS Z MATEMATYKI

DLA UCZNIÓW SZKÓŁ PODSTAWOWYCH

ETAP WOJEWÓDZKI

KLUCZ ODPOWIEDZI

Zasady przyznawania punktów

- **za każdą poprawną odpowiedź – 1 punkt**
- **za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi – 0 punktów**

Nr zadania	Poprawna odpowiedź
1.	C
2.	A
3.	A
4.	A
5.	D
6.	B
7.	B
8.	C
9.	C
10.	D

Informacja ogólna o ocenianiu zadań otwartych

Niżej zaproponowano opis, za jakie czynności ucznia należy przyznawać kolejne punkty. Opis ma charakter hierarchiczny tj. uczeń otrzymuje wyższą liczbę punktów, jeśli spełnia wymagania zapisane nie tylko przy tej liczbie, ale także wcześniejsze. Równocześnie w całym procesie oceniania trzeba mieć na uwadze, że uczeń może pewne czynności rachunkowe, ale także i heurystyki, czy dedukcje wykonywać w pamięci i bezpośrednio z nich korzystać. W takiej sytuacji należy, zgodnie z holistyczną koncepcją oceniania dopuścić możliwość stosowania skrótów w zapisie i nie obniżać uczniom punktów za rozwiązania, mimo skrótowego zapisu, osoba oceniająca jest w stanie prześledzić cały tok rozumowania dziecka. Intencją autora było zbudowanie na etap wojewódzki takiego zestawu zadań, który umożliwi Państwu wyłonienie naprawdę najlepszych młodych matematycznych umysłów w województwie. Aby tak się stało, w ocenianiu prac uczniów trzeba przede wszystkim doceniać dobre pomysły i sprytne strategie oraz niestandardową wiedzę uczniów. Uczniowie na etapie wojewódzkim nie powinni tracić punktów za drugorzędne usterki w zapisie, jeśli ich prace zawierają poprawne, choć niekiedy niedbale zapisane rozwiązania. Warto pamiętać, że wielu świetnych matematyków to osoby z dysleksją/ dysgrafią, które to dysfunkcje sprawiają, że zapis *ich rozwiązań jest niestaranny, czasem mało czytelny. Jednak autorami takich trudnych do oceny prac mogą być bardzo zdolni uczniowie. Jednocześnie Państwo oceniający prace uczniów powinni uważnie odnotowywać, czy uczniowie istotnie prezentują umiejętności sprawdzane zadaniem. Np. w zadaniu nr 11 wystarczy, jeśli uczeń po przekształceniach zapisze, że* $S + W - K = 2$. *Nie musi dodawać, że otrzymany wynik nie zależy od n. Ale jeśli uczeń sprawdza na konkretnych przykładach wartość wyrażenia* $S + W - K$ *, nie otrzymuje za te czynności żadnych punktów, choćby obliczenia były wykonywane poprawnie.*

Zadanie 11. (0-3)

1 pkt – poprawne zapisanie S i K za pomocą n
2 pkt – poprawne zapisanie wyrażenia $S + W - K$ za pomocą n
3 pkt – poprawne przekształcenie wyrażenia $S + W - K$ i uzasadnienie, że wartość wyrażenia $S + W - K$ nie zależy od n

Przykładowe rozwiązanie

$W = n$
$S = n$
$K = 2n - 2$
$S + W - K = n + n - (2n - 2) = 2n - 2n + 2 = 2$

Zadanie 12. (0-4)

1 pkt – poprawne zapisanie dwóch kolejnych równości
2 pkt – poprawne zapisanie dwóch kolejnych równości i ogólnej zależności
3 pkt – poprawne zastosowanie wzoru skróconego mnożenia dla kwadratu różnicy n i 1 $(n-1)^2$ lub poprawne pomnożenie różnicy liczb n i 1 przez różnicę liczb n i 1 lub zauważenie, że prawa strona równości jest kwadratem sumy liczb $n-1$ oraz 1
4 pkt – poprawne przekształcenie otrzymanej sumy algebraicznej

Przykładowe rozwiązanie

$5\cdot5 = 25 = 16 + 2\cdot4 + 1$
$6\cdot6 = 36 = 25 + 2\cdot5 + 1$

$n^2 = (n-1)^2 + 2\cdot(n-1) + 1$

Uzasadnienie

$(n-1)^2 + 2\cdot(n-1) + 1 = n^2 - 2n + 1 + 2n - 2 + 1 = n^2$
lub
$(n-1)^2 + 2\cdot(n-1) + 1 = ((n-1)+1)^2 = (n+1-1)^2 = n^2$

Zadanie 13. (0-3)

1 pkt – poprawne wykonanie działania $(x-1)\otimes(x+1)$
2 pkt – poprawne zastosowanie zdefiniowanego działania do wyznaczenia $(x+2)\otimes x$
3 pkt – poprawne wyznaczenie x

Przykładowe rozwiązanie

$$(x+2)\otimes\frac{x-1+x+1}{2} = (x+2)\otimes x = \frac{x+2+x}{2} = \frac{2x+2}{2} = x+1$$

$x + 1 = 2020$
$x = 2019$

Zadanie 14. (0-3)
1 pkt – zapisanie iloczynu 2019·2020 za pomocą iloczynu sumy przez różnicę umożliwiającego skorzystanie ze wzoru skróconego mnożenia lub inne przekształcenie umożliwiające skorzystanie ze wzorów skróconego mnożenia
2 pkt – doprowadzenie wyrażenia pod pierwiastkiem do postaci 2020^2
3 pkt – wyznaczenie końcowego wyniku

Przykładowe rozwiązanie
I sposób

$$\sqrt{2020\sqrt{1+(2020-1)(2020+1)}}=\sqrt{2020\sqrt{1+2020^2-1}}=\sqrt{2020\cdot\sqrt{2020^2}}=2020$$

II sposób

$$\sqrt{2020\sqrt{1+2019\cdot 2021}}=\sqrt{2020\sqrt{1+2019\cdot(2019+2)}}=\sqrt{2020\sqrt{1+2\cdot 2019+2019^2}}=$$

$$=\sqrt{2020\sqrt{(1+2019)^2}}=\sqrt{2020\cdot 2020}=2020$$

Zadanie 15. (0-5)
1 pkt – poprawna metoda wyznaczenia wieku każdej z czterech osób przed czterema laty
2 pkt – poprawna metoda wyznaczenia średniej wieku tych osób przed czterema laty
3 pkt – poprawna metoda wyznaczenia średniej obecnego wieku tych osób
4 pkt – poprawna metoda obliczenia, o ile procent wzrosła średnia wieku tych czterech osób w ciągu czterech lat
5 pkt – poprawność rachunkowa w całym zadaniu

Przykładowe rozwiązanie
Wiek każdej z tych osób przed czterema laty, to liczba, której odpowiednio 10%, 16%, 40% i 80% jest równe 4 lata.

Osoba	I	II	III	IV
Wiek przed czterema laty	4 : 0,1 = 40	4 : 0,16 = 25	4 : 0,4 = 10	4 : 0,8 = 5
Wiek obecnie	44	29	14	9

Średnia wieku tych osób przed czterema laty:

$$\frac{40+25+10+5}{4}=\frac{80}{4}=20$$

Średnia wieku tych osób obecnie:

$$\frac{80+4\cdot 4}{4}=\frac{96}{4}=24 \quad \text{lub} \quad \frac{44+29+14+9}{4}=\frac{96}{4}=24$$

24 – 20 = 4

Uwaga
Uczeń może zauważyć, że jeżeli wiek każdej osoby zwiększył się o 4 lata, to średnia wieku tych osób również wzrosła o 4 lata.

$$\frac{4}{20}\cdot 100\% = 20\%$$

Odpowiedź: W ciągu czterech lat średnia arytmetyczna wieku tych osób wzrosła o 20%.

Zadanie 16. (0-3)
1 pkt – poprawny sposób podziału ośmiokąta
2 pkt – poprawny sposób obliczenia pól figur, na które został podzielony ośmiokąt
3 pkt – obliczenie pola ośmiokąta

Przykładowe rozwiązanie
I sposób

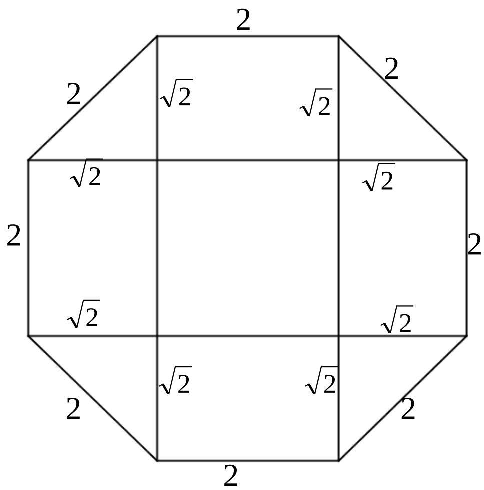
Ośmiokąt foremny można podzielić (w sposób pokazany na rysunku) na kwadrat o boku długości 2, cztery prostokąty o bokach długości 2 i $\sqrt{2}$ oraz cztery trójkąty prostokątne równoramienne o przyprostokątnych długości $\sqrt{2}$.

$P = 2^2 + 4 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$

$P = 4 + 8\sqrt{2} + 4$

$P = 8 + 8\sqrt{2}$

Odpowiedź: Pole ośmiokąta jest równe $8 + 8\sqrt{2}$.



II sposób

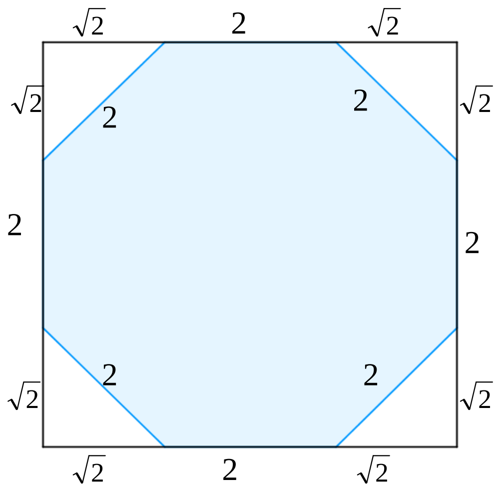
Pole ośmiokąt foremnego jest różnicą pola kwadratu o boku długości $2 + 2\sqrt{2}$ oraz pól czterech trójkątów prostokątnych równoramiennych o przyprostokątnych długości $\sqrt{2}$.

$P = \left(2 + 2\sqrt{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$

$P = 4 + 8\sqrt{2} + 8 - 4$

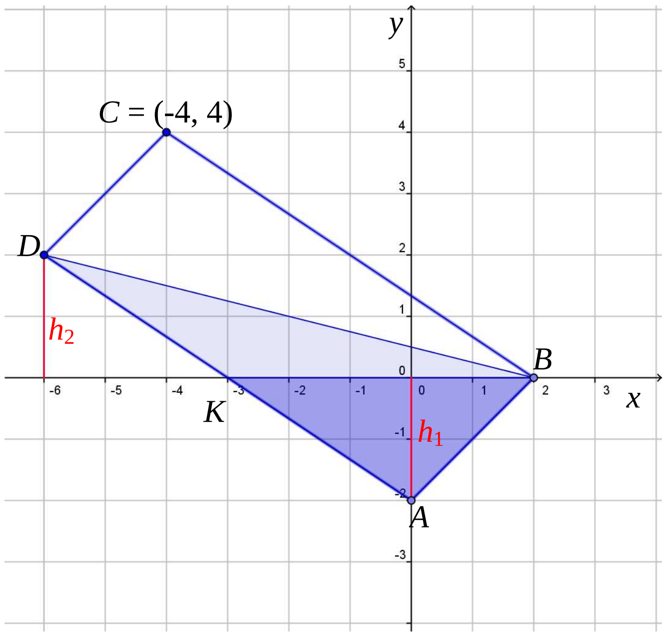
$P = 8 + 8\sqrt{2}$

Odpowiedź: Pole ośmiokąta jest równe $8 + 8\sqrt{2}$.



Zadanie 17. (0-4)
1 pkt – zaznaczenie punktów *A*, *B*, *C* i *D* w układzie współrzędnych i podanie współrzędnych punktu *C*
2 pkt – poprawny sposób podziału równoległoboku na figury, których pola można obliczyć wykorzystując odcinki równoległe do osi *OX* lub *OY* lub dobudowanie do równoległoboku trójkątów prostokątnych, które razem z równoleglobokiem tworzą prostokąt
3 pkt – poprawne metody obliczenia pól figur, na które został podzielony równoległobok
4 pkt – obliczenie pola równoległoboku *ABCD*

Przykładowe rozwiązanie
I sposób
Przekątna równoległoboku dzieli go na dwa przystające trójkąty, stąd pole równoległoboku *ABCD* jest równe dwukrotności pola trójkąta *ABD*.
Trójkąt *ABD* dzielimy na dwa trójkąty *ABK* i *KBD*.



$$P_{\Delta ABK} = \frac{1}{2} \cdot |BK| \cdot h_1$$
$$P_{\Delta ABK} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 = 5$$
$$P_{\Delta KBD} = \frac{1}{2} \cdot |BK| \cdot h_2$$
$$P_{\Delta KBD} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 = 5$$

Pole trójkąta *ABD* jest równe 5 + 5 = 10

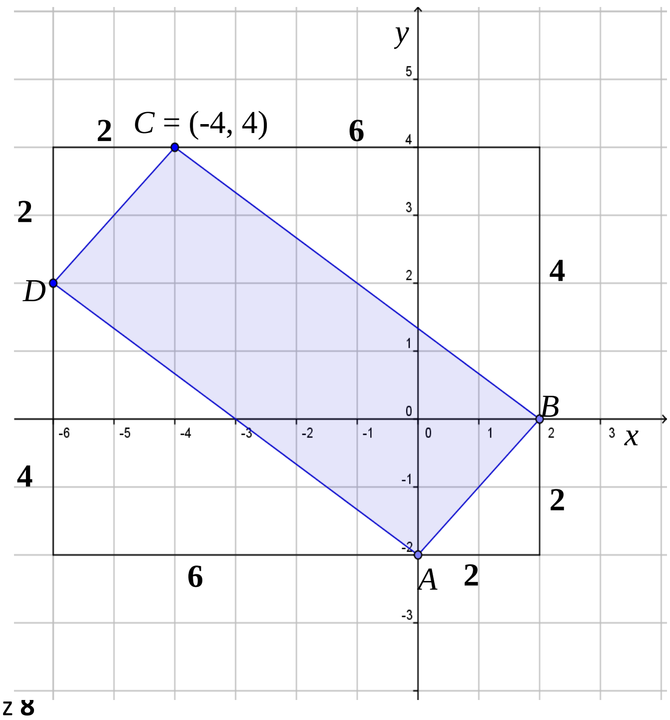
Pole równoległoboku *ABCD* jest równe
2 ·10 = 20.

II sposób

Pole równoległoboku *ABCD* jest równe różnicy pola prostokąta o bokach długości 6 i 8 oraz pól czterech trójkątów prostokątnych.

$$P_{ABCD} = 6 \cdot 8 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4$$
$$P_{ABCD} = 48 - 4 - 24 = 20$$

Pole równoległoboku *ABCD* jest równe 20.



Zadanie 18. (0-5)

1 pkt –obliczenie długości krawędzi bocznych *AS* i *CS* ostrosłupa – wykorzystanie twierdzenia Pitagorasa lub zauważenie, że trójkąty *ADS* i *CDS* to trójkąty „egipskie” **lub** poprawna metoda obliczenia długości krawędzi *BS* ostrosłupa – podanie/obliczenie długości przekątnej kwadratu o boku długości 3 i wykorzystanie twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *DBS*

2 pkt – obliczenie długości krawędzi bocznych *AS* i *CS* ostrosłupa – wykorzystanie twierdzenia Pitagorasa lub zauważenie, że trójkąty *ADS* i *CDS* to trójkąty „egipskie” **i** poprawna metoda obliczenia długości krawędzi *BS* ostrosłupa – podanie/obliczenie długości przekątnej kwadratu o boku długości 3 i wykorzystanie twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *DBS*

3 pkt – uzasadnienie, że trójkąty *ABS* i *BCS* są prostokątne z wykorzystaniem twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa (dopuszczamy możliwość zapisania przez ucznia dowodu dla jednego trójkąta i uwagi, że trójkąty *ABS* i *CBS* są przystające, więc drugi trójkąt także musi być prostokątny)

4 pkt – obliczenie pola powierzchni bocznej ostrosłupa

5 pkt –narysowanie siatki ostrosłupa

Przykładowe rozwiązanie

Trójkąty *ADS* i *CDS* to trójkąty „egipskie”, czyli krawędzie *AS* i *CS* mają długość 5

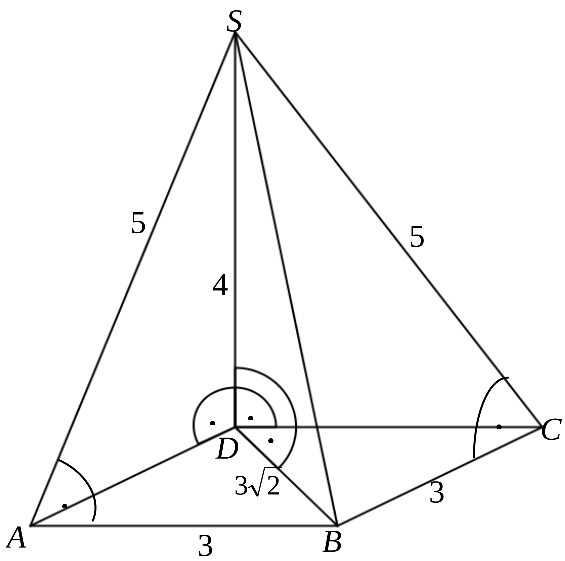
lub

$|AS| = |CS| = x$

$x^2 = 3^2 + 4^2$

$x^2 = 25$

$x = 5$



Czworokąt *ABCD* jest kwadratem o boku długości 3, jego przekątna *BD* ma długość $3\sqrt{2}$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *DBS*

$|BS|^2 = 4^2 + \left(3\sqrt{2}\right)^2$

$|BS|^2 = 34$

$|BS| = \sqrt{34}$

Trójkąty *ABS* i *BCS* mają boki długości 3, 5 i $\sqrt{34}$

$3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34 = \left(\sqrt{34}\right)^2$

Na podstawie twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa wnioskujemy, iż trójkąty *ABS* i *BCS* są prostokątne.

P_b – pole powierzchni bocznej ostrosłupa

$$P_b = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4 + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 5 = 12 + 15 = 27$$

Odpowiedź: Pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa jest równa 27.

Siatka ostrosłupa