KONKURS Z MATEMATYKI

DLA UCZNIÓW SZKÓŁ PODSTAWOWYCH

ETAP WOJEWÓDZKI

KLUCZ ODPOWIEDZI

Zasady przyznawania punktów

- **za każdą poprawną odpowiedź – 1 punkt**
- **za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi – 0 punktów**

Nr zadania	Poprawna odpowiedź
1.	C
2.	C
3.	B
4.	D
5.	C
6.	B
7.	A
8.	D
9.	C
10.	B

Informacja ogólna o ocenianiu zadań otwartych

Niżej zaproponowano opis, za jakie czynności ucznia należy przyznawać kolejne punkty. Najczęściej opis ma charakter hierarchiczny tj. uczeń otrzymuje wyższą liczbę punktów, jeśli spełnia wymagania zapisane nie tylko przy tej liczbie, ale także wcześniejsze. W uwagach zostały odnotowane sytuacje, w których uczeń otrzymuje punkty za inne etapy rozwiązania zadania niże te, które są ujęte w punktacji zadania na początku.

Zadanie 11. (0-3)

1 pkt – poprawne wyłączenie 2019 i 2020 przed nawias odpowiednio z pierwszego i drugiego składnika sumy (I sposób)
lub
poprawne zapisanie liczb 20192019 i 20202020 w postaci iloczynów $2019 \cdot 10001$ i $2020 \cdot 10001$ (II i III sposób)
2 pkt – poprawne przekształcenie wyrażenia arytmetycznego do postaci
$2019 \cdot 2020 \cdot (10^4 + 1) – 2019 \cdot 2020 \cdot (10^4 + 1)$ (I sposób)
lub
poprawne przekształcenie wyrażenia arytmetycznego do postaci
$2019 \cdot 2020 \cdot 10001 – 2020 \cdot 2019 \cdot 10001$ (II sposób)
lub
poprawne zastąpienie liczby 2019 literą np. a tzn. zapisanie wyrażenia w postaci
$a \cdot (a + 1) \cdot 10001 – (a + 1) \cdot a \cdot 10001$ (III sposób)
3 pkt – poprawne obliczenie wartości wyrażenia (0)

Przykładowe rozwiązanie

I sposób
$2019 \cdot (2020 \cdot 10^4 + 2020) – 2020 \cdot (2019 \cdot 10^4 + 2019) =$
$= 2019 \cdot 2020 \cdot (10^4 + 1) – 2019 \cdot 2020 \cdot (10^4 + 1) = 0$

II sposób
$20192019 = 2019 \cdot 10001$
$20202020 = 2020 \cdot 10001$
$2019 \cdot 20202020 – 2020 \cdot 20192019 = 2019 \cdot 2020 \cdot 10001 – 2020 \cdot 2019 \cdot 10001 = 0$

III sposób
$20192019 = 2019 \cdot 10001$
$20202020 = 2020 \cdot 10001$
$a = 2019$
$2019 \cdot 20202020 – 2020 \cdot 20192019 = a \cdot (a + 1) \cdot 10001 – (a + 1) \cdot a \cdot 10001 = 0$

Zadanie 12. (0-3)

1 pkt – poprawne zapisanie w ogólnej postaci liczby całkowitej, która przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2 ($k = 5n + 2$, n – dowolna liczba całkowita)
2 pkt –zastosowanie wzoru skróconego mnożenia dla kwadratu sumy
3 pkt – poprawne przekształcenie otrzymanego wyrażenie do postaci $5m + 2$ (m jest liczbą całkowitą)

Uwaga1.
Uczeń otrzymuje pierwszy punkt także wówczas, gdy pominie dopisek, że n jest liczbą całkowitą.
Uwaga 2.
Uczeń może otrzymać 2 punkty, jeśli nieprawidłowo obliczy kwadrat sumy, ale prawidłowo zinterpretuje swój wynik w kontekście reszty z dzielenia przez 5.

Przykładowe rozwiązanie

Niech n – dowolna liczba całkowita, wówczas

$k = 5n + 2$

$3k^2 = 3(5n + 2)^2 = 3(25n^2 + 20n + 4) = 75n^2 + 60n + 12 = 5(15n^2 + 12n + 2) + 2 = 5m + 2$,

gdzie $m = 15n^2 + 12n + 2$ i m jest liczbą całkowitą

Zadanie 13. (0-4)

1 pkt – poprawne zapisanie w ogólnej postaci liczby dwucyfrowej

2 pkt – poprawne zapisanie liczby czterocyfrowej utworzonej przez dopisanie do liczby dwucyfrowej jej lustrzanego odbicia

3 pkt – poprawne przekształcenie otrzymanej sumy algebraicznej do postaci $1001a + 110b$

4 pkt – poprawne przekształcenie otrzymanej sumy algebraicznej do postaci $11n$ (n dodatnia liczba naturalna)

Uwaga

Jeżeli uczeń nie zapisze poprawnych założeń dotyczących wartości, jakie mogą przyjmować cyfra dziesiątek i jedności liczby dwucyfrowej a poza tym poprawnie rozwiąże zadanie - otrzymuje 3 pkt.

Przykładowe rozwiązanie

$10a + b$ – liczba dwucyfrowa, $a \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9)$ i $b \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$10b + a$ – lustrzane odbicie tej liczby dwucyfrowej

$1000a + 100b + 10b + a$ – liczba czterocyfrowa utworzona przez dopisanie do liczby dwucyfrowej jej lustrzanego odbicia

$1000a + 100b + 10b + a = 1001a + 110b = 11(91a + 10b) = 11n$

$n = 91a + 10b$ to dodatnia liczba naturalna

Zadanie 14. (0-3)

1 pkt – poprawne zastosowanie wzoru skróconego mnożenia- różnica kwadratów dwóch wyrażeń
(I sposób) lub kwadratu sumy i kwadratu różnicy dwóch wyrażeń ((II sposób)

2 pkt – poprawne zastosowanie metody rozwiązywania równania

3 pkt – poprawne wyznaczenie x $\left(x = \frac{1}{2}\right)$

Przykładowe rozwiązanie

I sposób

$(x + 2^{2019} + x - 2^{2019})(x + 2^{2019} - x + 2^{2019}) = 2^{2020}$

$2x \cdot 2 \cdot 2^{2019} = 2^{2020}$

$x \cdot 4 \cdot 2^{2019} = 2^{2020}$

$x \cdot 2^{2021} = 2^{2020}$

$$x = \frac{1}{2}$$

II sposób

$x^2 + 2\cdot 2^{2019}x + 2^{2\cdot 2019} - (x^2 - 2\cdot 2^{2019}x + 2^{2\cdot 2019}) = 2^{2020}$

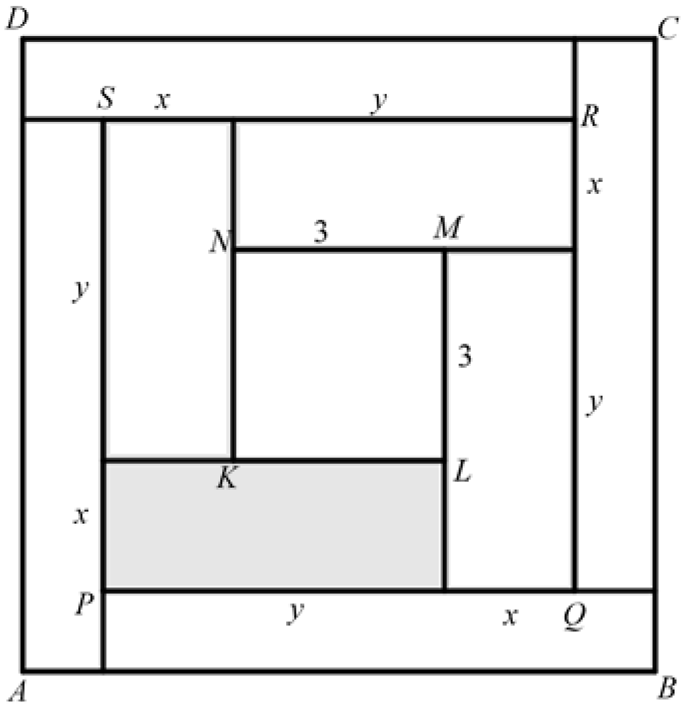
$x^2 + 2\cdot 2^{2019}x + 2^{2\cdot 2019} - x^2 + 2\cdot 2^{2019}x - 2^{2\cdot 2019} = 2^{2020}$

$x \cdot 4 \cdot 2^{2019} = 2^{2020}$
$x \cdot 2^{2021} = 2^{2020}$
$x = \frac{1}{2}$

Zadanie 15. (0-5)

1 pkt – poprawne obliczenie pola każdej części , na które został podzielony kwadrat *ABCD* (9)
2 pkt – poprawna metoda obliczenia długości boku kwadratu *PQRS*
3 pkt – zauważenie, że suma długości dwóch boków zacieniowanego prostokata jest równa długości boku kwadratu *PQRS* (I sposób) lub poprawna metoda wyznaczenie długości boków zacieniowanego prostokąta (II sposób)
4 pkt – poprawna metoda obliczenie obwodu zacieniowanego prostokąta
5 pkt – poprawność rachunkowa w całym zadaniu i podanie poprawnej odpowiedzi $(6\sqrt{5})$

Przykładowe rozwiązanie



x, *y* – długości boków zacieniowanego prostokąta oraz przystających do niego prostokątów
Czworokąt *PQRS* jest kwadratem o boku długości *x* + *y*.
Pole kwadratu *ABCD* jest równe 9 · 9 = 81
Pole każdej części jest równe 81 : 9 = 9.
Pole kwadratu *PQRS* jest równe 5 · 9 = 45, stąd długość jego boku jest równa:
(1) $x + y = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

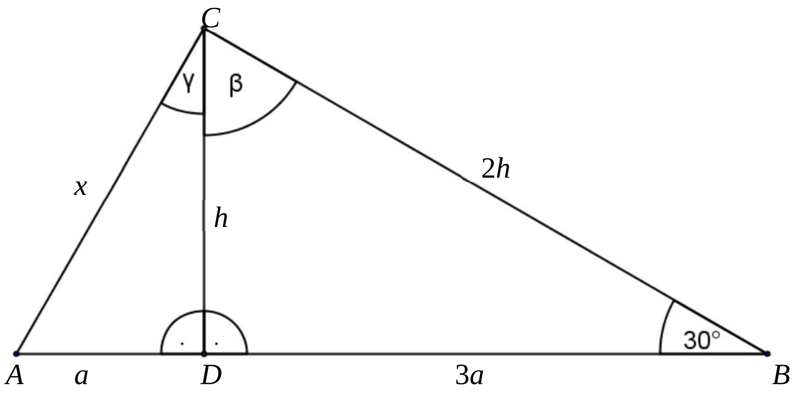
I sposób
Obwód zacieniowanego prostokąta

$2(x + y) = 2 \cdot 3\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$

II sposób
Kwadrat *KLMN* ma pole 9, czyli jego bok ma długość 3.
(2) $y = x + 3$
Po podstawieniu w równaniu (1) w miejsce *y* wyrażenia *x* + 3 otrzymujemy równanie:
$x + x + 3 = 3\sqrt{5}$
$2x = 3\sqrt{5} - 3$
$x = 1{,}5\sqrt{5} - 1{,}5$
$y = 1{,}5\sqrt{5} - 1{,}5 + 3 = 1{,}5\sqrt{5} + 1{,}5$
Obwód zacieniowanego prostokąta jest równy: $2(1{,}5\sqrt{5} - 1{,}5 + 1{,}5\sqrt{5} + 1{,}5) = 2 \cdot 3\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$.

Zadanie 16. (0-4)
1 pkt – zauważenie, że trójkąt *DBC* jest prostokątny i obliczenie miary drugiego kąta ostrego w tym trójkącie (60°) oraz podanie poprawnych zależności między długościami boków *DC* i *BC* w tym trójkącie (*BC* = 2· *DC*)
2 pkt – zauważenie, że odcinek *BD* jest wysokością trójkta równobocznego o boku *BC* i zapisanie poprawnej zależności między długościami boków *CD* i *BC*
3 pkt – poprawna metoda wyznaczenie długości boku *AC* (zastosowanie twierdzenia Pitagorasa)
4 pkt – zauważenie, że miara kąta *ACD* jest równa 30° i zapisanie poprawnego wniosku dotyczącego miary kąta *ACB* (I sposób) lub zastosowanie twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa (II sposób)

Przykładowe rozwiązanie
I sposób



Trójkąt *DBC* jest prostokątny, czyli β = 60°.
Jeżeli przez *a* oznaczymy długość odcinka *AD*, wówczas odcinek *DB* ma długość 3*a*.
Jeżeli przez *h* oznaczymy długość wysokości *CD*, wówczas bok *BC* ma długość 2*h* (przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego jest 2 razy dłuższa od długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta o mierze 30°).
Odcinek *BD* jest wysokością trójkąta równobocznego o boku długości 2*h*, stąd
$3a = \frac{2h\sqrt{3}}{2} = h\sqrt{3}$, czyli $h = \frac{3a}{\sqrt{3}} = \frac{3a\sqrt{3}}{3} = a\sqrt{3}$
Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *ADC*:
$x^2 = a^2 + h^2$

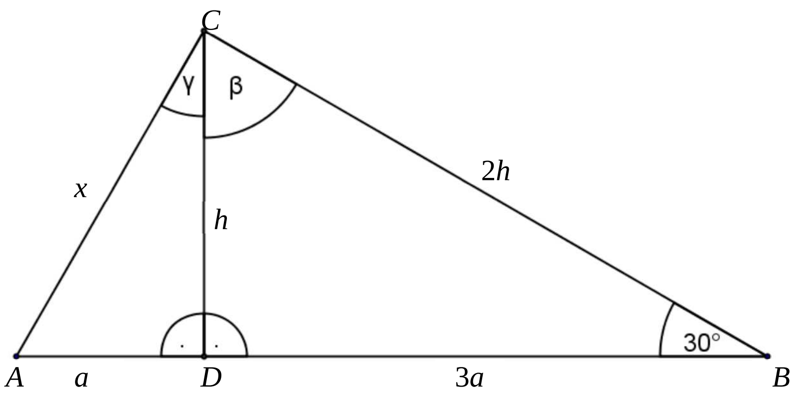
$x^2 = a^2 + \left(a\sqrt{3}\right)^2$

$x^2 = 4a^2$

$x = 2a$

W trójkącie prostokątnym *ADC*, przyprostokątna *AD* leżąca naprzeciw kąta o mierze γ jest 2 razy krótsza od przeciwprostokątnej, zatem $\gamma = 30°$.
Miara kąta *ACB* jest równa $\beta + \gamma = 60° + 30° = 90°$, zatem trójkąt *ABC* jest prostokątny.

II sposób



Jeżeli przez *a* oznaczymy długość odcinka *AD*, wówczas odcinek *DB* ma długość $3a$.
Jeżeli przez *h* oznaczymy długość wysokości *CD*, wówczas bok *BC* ma długość $2h$ (przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego jest 2 razy dłuższa od długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta o mierze 30°).
Odcinek *BD* jest wysokością trójkąta równobocznego o boku długości $2h$, stąd

$3a = \frac{2h\sqrt{3}}{2} = h\sqrt{3}$, czyli $h = \frac{3a}{\sqrt{3}} = \frac{3a\sqrt{3}}{3} = a\sqrt{3}$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *ADC*:

$x^2 = a^2 + h^2$

$x^2 = a^2 + \left(a\sqrt{3}\right)^2$

$x^2 = 4a^2$

$x = 2a$

Boki trójkąta *ABC* mają długości:

$|AB| = 4a,\ |AC| = 2a$, $|BC| = 2h = 2a\sqrt{3}$

$|AB|^2 = (4a)^2 = 16a^2$

$|AC|^2 + |BC|^2 = (2a)^2 + \left(2a\sqrt{3}\right)^2 = 4a^2 + 12a^2 = 16a^2$

$|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2$

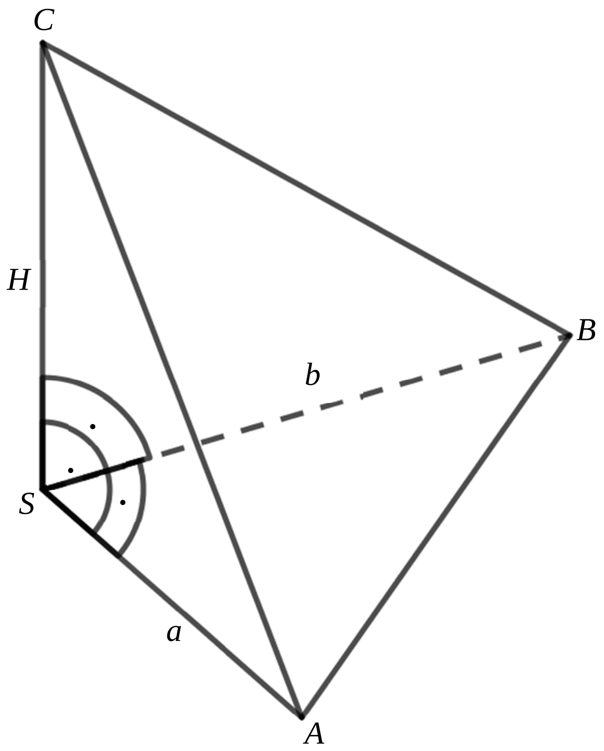
czyli trójkąt *ABC* jest prostokątny (na podstawie twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa.

Uwaga.
Jeśli uczeń podzielił odcinek AB punktem D w ten sposób, że krótszą część zaznaczył przy kącie 30°, to za całe rozwiązanie otrzymuje 0 pkt.

Zadanie 17. (0-4)

1 pkt – zapisanie poprawnych równań opisujących pola odpowiednich ścian ostrosłupa
2 pkt – poprawna metoda wyznaczenia wysokości ostrosłupa
3 pkt – poprawna metoda obliczenia objętości ostrosłupa
4 pkt – poprawność rachunkowa w całym zadaniu i podanie poprawnej odpowiedzi ($V = 4$)

Przykładowe rozwiązanie



Przyjmujemy, że trójkąt *ABS* jest podstawą ostrosłupa, wówczas *SC* to wysokość ostrosłupa.
Niech $|SA| = a$, $|SB| = b$ i $|SC| = H$.

$P_{\Delta ASB} = \frac{1}{2}ab = 3$, stąd (1) $ab = 6$

$P_{\Delta BSC} = \frac{1}{2}bH = 4$, stąd (2) $bH = 8$

$P_{\Delta ASC} = \frac{1}{2}aH = 6$, stąd (3) $aH = 12$

Z (2) i (3) $abH^2 = 96$ i $ab = 6$, stąd $H^2 = 16$, czyli $H = 4$.

$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}ab \cdot H$

$V = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 4 = 4$

Odpowiedź: Objętość tego ostrosłupa jest równa 4.

Uwaga 1.

Jeżeli uczeń nie przedstawia poprawnej metody obliczania długości krawędzi ostrosłupa np. z równań (1), (2) i (3) zgaduje długości krawędzi a, b i H i poprawnie oblicza objętość - otrzymuje 3 pkt.

Uwaga 2.
Uczeń może otrzymać 1 pkt. jeśli nie wyliczy poprawnie długości krawędzi, ale zastosuje prawidłową metodę liczenia objętości ostrosłupa.

Zadanie 18. (0-4)

1 pkt – poprawna metoda obliczenia objętości kuli (do obliczenia objętości uczeń musi podstawić promień kuli) lub poprawna metoda obliczenia objętości walca (do obliczenia objętości uczeń musi podstawić promień walca)
2 pkt – poprawna metoda obliczenia objętości kuli i poprawna metoda obliczenia objętości walca
3 pkt – poprawna metoda obliczenia czasu, w którym cieknąca kranu woda zapełni naczynie w kształcie walca
4 pkt – poprawność rachunkowa w całym zadaniu i podanie poprawnej odpowiedzi (125 minut)

Uwaga.
Jeśli uczeń w metodzie liczenia objętości kuli lub walca wstawi zamiast długości promienia długość średnicy, a następnie stosuje prawidłową metodę obliczenia czasu napełniania naczynia i doprowadza obliczenia do końca, nie popełniając przy tym błędów otrzymuje 2 pkt.

Przykładowe rozwiązanie

$r_k = 3\,\text{mm}$
V_k – objętość kuli
$V_k = \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 36\pi \text{ (mm}^3\text{)}$
$r_w = 3\,\text{cm}$
V_w – objętość walca
$V_w = \pi \cdot 3^2 \cdot 10 = 90\pi \text{ (cm}^3\text{)}$
$V_w = 90000\pi \text{ mm}^3$

I sposób

W ciągu minuty z kranu wycieka 20 kropel, czyli $20 \cdot 36\pi$ mm^3= 720π mm^3 wody
1 minuta - 720π mm^3 wody
x minut – 90000π mm^3 wody
$x = \frac{90000\pi}{720\pi} = 125 \text{ (minut)}$
Odp. W ciągu 125 minut woda ciekn̨ąca z kranu zapełni to naczynie.

II sposób

$\frac{V_w}{V_k} = \frac{90000\pi}{36\pi} = 2500$

2500 : 20 = 125 (min)

Odp. W ciągu 125 minut woda ciekn̨ąca z kranu zapełni to naczynie.