KONKURS Z MATEMATYKI
DLA UCZNIÓW SZKÓŁ PODSTAWOWYCH

ARKUSZ PRZYKŁADOWY
KLUCZ ODPOWIEDZI

Część I - zadania krótkiej odpowiedzi

W zadaniach krótkiej odpowiedzi (zadania od 1 do 6) ocenie podlega jedynie odpowiedź, umieszczona przez ucznia w wyznaczonym miejscu arkusza. W każdym zadaniu krótkiej odpowiedzi można uzyskać 2 punkty za poprawną odpowiedź. W niektórych zadaniach możliwe jest również przyznanie 1 punktu za niepoprawną odpowiedź, o ile jest ona wymieniona w poniższej tabeli (odpowiedzi te świadczą o prawidłowym sposobie postępowania ucznia, połączonym z drobnym błędem w obliczeniach lub rozumowaniu). Szczegółowe uzasadnienie takiej punktacji znajduje się pod przykładowymi rozwiązaniami poszczególnych zadań.

	Prawidłowa odpowiedź (2 punkty)	**Częściowo poprawna odpowiedź (1 punkt)**
Zadanie 1.	99	98 *albo* 100
Zadanie 2.	972	990 *albo* 981 *albo* 986 *albo dowolna liczba spełniająca trzy warunki z zadania mniejsza niż* 972
Zadanie 3.	$3{,}2\text{cm}$ *(lub ta wartość wyrażona prawidłowo w innych jednostkach, np.* 32mm*)*	-
Zadanie 4.	1010	-
Zadanie 5.	35	34 *albo* 36
Zadanie 6.	11	12

Uwaga! Uczeń nie musi umieć uzasadnić poprawności rozumowania ani opisać jego szczegółów. Zadania krótkiej odpowiedzi dopuszczają rozumowania intuicyjne, metodę prób i błędów oraz inne sposoby prowadzące ucznia do uzyskania prawidłowego wyniku. Opisane poniżej przykładowe rozwiązania służą wyjaśnieniu poprawnych odpowiedzi umieszczonych w kluczu oraz stanowią materiał edukacyjny, do wykorzystania np. na kółku matematycznym.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIA

Zadanie 1.

Zadanie można rozwiązać, wyobrażając sobie, jak wygląda pisemne odejmowanie liczb opisanych w zadaniu. Większą liczbą jest ta, która ma więcej cyfr. W takim razie w naszym odejmowaniu liczba złożona ze 150 jedynek jest odjemną, a odjemnikiem jest liczba złożona ze 100 dwójek.

Na miejscu jedności mamy odejmowanie cyfry 2 od cyfry 1, musimy więc „pożyczyć" z wyższego rzędu. Otrzymujemy $11-2=9$. W dziesiątkach mamy teraz odejmowanie cyfry 2 od 0, po „pożyczeniu" otrzymujemy $10-2=8$. W kolejnych 98 rzędach (aż do „końca odjemnika") otrzymujemy dokładnie taką samą sytuację: odejmując cyfrę 2 od 0 musimy „pożyczyć" i otrzymujemy $10-2=8$.

Na kolejnych pozycjach nie mamy już nic do odejmowania. Musimy więc przepisać kolejne 50 cyfr odjemnej (pamiętając, że pierwsza cyfra z prawej strony jest pomniejszona ze względu na wcześniej wykonane „pożyczanie").

Otrzymujemy więc wynik odejmowania postaci: $\underbrace{11\ldots11}_{49\ cyfr}0\underbrace{88\ldots88}_{99\ cyfr}9$.

W szczególności w wyniku pojawia się 99 cyfr 8.

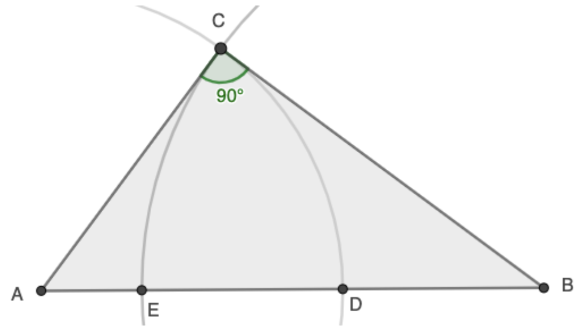
Zadanie 2.

Ponieważ szukamy największej liczby trzycyfrowej spełniającej określone warunki, zaczniemy poszukiwania od liczb o cyfrze setek 9. Jeśli znajdziemy wśród nich największą taką, która spełnia warunki zadania, będzie to jednocześnie największa wśród wszystkich takich liczb trzycyfrowych.

W naszej liczbie cyfry mają być różne, dlatego cyfra dziesiątek może być równa co najwyżej 8. Sprawdźmy więc, czy istnieje liczba spełniająca wszystkie warunki postaci $98x$, gdzie x oznacza cyfrę jedności (jeśli tak, będzie to szukana liczba). Aby ta liczba była podzielna przez 9, musiałaby mieć sumę cyfr podzielną przez 9. Ta suma cyfr jest równa $9+8+x=17+x$, więc może być podzielna przez 9 tylko dla $x=1$. Liczba 981 jest jednak nieparzysta, więc nie może być szukaną liczbą.

W takim razie będziemy szukać liczby postaci $97x$. Aby była to liczba podzielna przez 9, wystarczy by jej suma cyfr była podzielna przez 9. Suma cyfr tej liczby jest równa $9 + 7 + x = 16 + x$, więc jest podzielna przez 9 tylko dla $x = 2$. Możemy łatwo sprawdzić, że liczba 972 spełnia wszystkie warunki z zadania. Sprawdziliśmy również, że nie ma większej liczby o takich własnościach.

Zadanie 3.
Ponieważ trójkąt ABC jest prostokątny, możemy obliczyć długość przeciwprostokątnej AB z twierdzenia Pitagorasa:



$(4{,}8\text{cm})^2 + (6{,}4\text{cm})^2 = |AB|^2$

$23{,}04\text{cm}^2 + 40{,}96\text{cm}^2 = |AB|^2$

$64\text{cm}^2 = |AB|^2$

$|AB| = 8\text{cm}$

Mamy również $|AD| = |AC| = 4{,}8\text{cm}$
oraz $|BE| = |BC| = 6{,}4\text{cm}$ (są to promienie odpowiednich okręgów z zadania).
Ponadto $|BD| = |AB| - |AD| = 8\text{cm} - 4{,}8\text{cm} = 3{,}2\text{cm}$. W takim razie punkt D leży na odcinku BE oraz $|DE| = |BE| - |BD| = 6{,}4\text{cm} - 3{,}2\text{cm} = 3{,}2\text{cm}$.

Zadanie 4.
Zwróćmy uwagę, że reszta z dzielenia jest zawsze mniejsza od dzielnika. Dlatego rozpoczniemy poszukiwanie największej reszty z dzielenia od działań z największymi dzielnikami.

Dla dużych dzielników (większych od połowy liczby 2022, czyli od 1011), wynikiem z dzielenia jest 1, a co za tym idzie, dzielnik i reszta z dzielenia sumują się do 2022. Wśród tych dzieleń największą resztę otrzymamy więc dla dzielnika 1012 i będzie to reszta równa 1010.

Czy reszta z dzielenia może być większa od 1010? Zauważmy, że dla dzielników równych co najwyżej 1010 reszta będzie mniejsza od nich, a więc również od 1010. Dla dzielnika równego 1011 otrzymujemy zaś dzielenie $2022 : 1011 = 2$ r. 0.

W takim razie największą uzyskaną przez Lucynę resztą z dzielenia jest 1010.

Zadanie 5.
W zadaniu mowa jest o liczbach postaci $3n$, odległych na osi liczbowej od liczby 60 o mniej niż 53. Możemy wyobrazić sobie okrąg o środku w liczbie 60 i promieniu 53 -

szukane liczby leżą wewnątrz tego okręgu. Ponieważ ten okrąg przecina oś liczbową w punktach odpowiadającym liczbom 7 i 113, otrzymujemy podwójną nierówność opisującą szukane liczby n:

$$7 < 3n < 113,$$

co po podzieleniu przez 3 daje nierówność

$$2\frac{1}{3} < n < 37\frac{2}{3}.$$

Ponieważ liczba n ma być liczbą naturalną, okazuje się, że szukanymi liczbami są wszystkie liczby naturalne od 3 do 37 włącznie. Takich liczb jest 35.

Uwaga: Uczniowie często mylą się o 1 przy zliczaniu liczb naturalnych z danego zakresu (tutaj od 3 do 37), co jest tylko częścią tego zadania. Dlatego część punktów przyznajemy za odpowiedź różniącą się o 1 od poprawnej.

Zadanie 6.

Zastanowimy się na początku, ile różnych dzielników pierwszych może mieć liczba podzielna przez 11, która ma dokładnie cztery dzielniki.

Gdyby była to liczba, w której rozkładzie pojawia się tylko jedna liczba pierwsza, to musiałaby to być liczba pierwsza 11, a szukana liczba miałaby postać 11^n, gdzie n jest pewną liczbą naturalną. Dzielniki takiej liczby to liczby postaci 11^k, gdzie k jest liczbą całkowitą między 0 a n (włącznie). Skoro dzielników ma być cztery, jest to możliwe wtedy i tylko wtedy gdy $n = 3$. Jedyną liczbą o jednym czynniku pierwszym, która ma dokładnie 4 dzielniki jest to 11^3. Jest to jednak liczba większa od 444 (a nawet większa od 1000), więc nie bierzemy jej pod uwagę przy zliczaniu.

Rozważmy teraz sytuację, gdy liczba ma dwa różne dzielniki pierwsze: 11 oraz p. Taka liczba ma wśród dzielników 1, 11, p oraz $11p$ (zwróćmy uwagę, że te liczby są czterema różnymi dzielnikami). Jeśli chcemy, by liczba miała dokładnie cztery dzielniki, nie może mieć dzielników innych niż te wymienione. W takim razie w jej rozkładzie na czynniki pierwsze liczby 11 i p muszą występować w pierwszej potędze (inaczej taka liczba dzieliłaby się jeszcze przez 11^2 lub p^2). Jeśli tak jest, to faktycznie wymienione cztery dzielniki są tymi jedynymi.

Wiemy już, że warunek o czterech dzielnikach spełniają wszystkie liczby postaci $11p$ dla liczb pierwszych p różnych od 11. Musimy policzyć, ile jest takich liczb mniejszych od 444. Zauważmy, że warunek $11p < 444$ jest równoważny $p < 40\frac{4}{11}$, co daje 11 liczb pierwszych p różnych od 11 (są to $2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37$).

Jeśli liczba dzieli się przez co najmniej 3 różne liczby pierwsze 11, p i q, to ma więcej niż cztery dzielniki, ponieważ są wśród nich między innymi $1, 11, p, q$ oraz $11pq$.

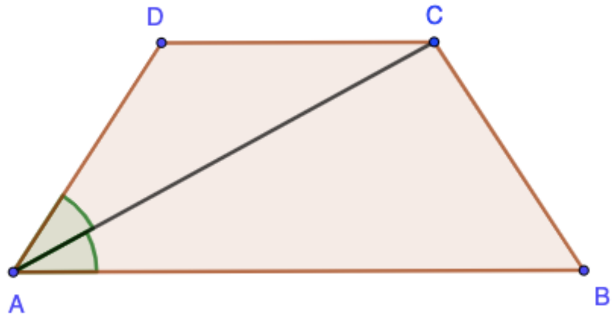
Łącznie jest 11 liczb spełniających warunki zadania (wszystkie są postaci $11p$ dla liczb pierwszych $p \neq 11$).

Uwaga:
Uczeń może rozwiązywać zadanie metodą sprawdzania kolejnych liczb. Po jakimś czasie może zauważyć, że liczby postaci $11p$ dla liczb pierwszych p mają cztery dzielniki. Stawiając hipotezę, że są to właśnie szukane liczby, uczeń otrzyma prawidłową odpowiedź.
Uczeń może również popełnić niewielki błąd, zapominając o warunku $p \neq 11$ przy zliczaniu liczb pierwszych nie większych od 40. W takiej sytuacji może otrzymać wynik 12. Za taki wyniki przyznajemy uczniowi część punktów.

Część II - zadania otwarte

Zadanie 7. (0-4)

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE



Oznaczmy wierzchołki trapezu jak na rysunku. Z warunków zadania wiemy, że $|AD| = |BC|$ oraz $|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle CAB|$.

Zauważmy, że $|\sphericalangle DCA| = |\sphericalangle CAB|$, ponieważ są to kąty naprzemianległe.

W takim razie $|\sphericalangle DCA| = |\sphericalangle CAD|$, a stąd trójkąt DAC jest równoramienny, $|DA| = |DC|$.

Z warunku dotyczącego obwodu otrzymujemy

$17\text{cm} + |AD| + |DC| + |CB| = 56\text{cm}$, a stąd

$17\text{cm} + 3 \cdot |DC| = 56\text{cm}$.

Rozwiązując to równanie otrzymujemy długość krótszej podstawy trapezu $|DC| = 13\text{cm}$.

Odpowiedź: Krótsza podstawa trapezu ma długość 13cm.

<u>Uwaga:</u> Innym naturalnym uzasadnieniem równości $|\sphericalangle DCA| = |\sphericalangle CAD|$ jest rachunek na kątach. Uczeń może oznaczyć $|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle CAB| = \alpha$. Następnie z sumy kątów przy ramieniu AD może obliczyć $|\sphericalangle CDA| = 180^\circ - 2\alpha$. Z sumy kątów w trójkącie CDA może wówczas obliczyć, że $|\sphericalangle DCA| = \alpha$.

SCHEMAT OCENIANIA

*Uczeń otrzymuje **4 punkty**, jeśli za pomocą poprawnego rozumowania uzyskał prawidłowy wynik.*

*Uczeń otrzymuje **3 punkty**, jeśli popełnił jeden niewielki błąd w rozumowaniu lub obliczeniach, np.*

- *doszedł do równania* $17cm + 3 \cdot |DC| = 56cm$*, ale błędnie obliczył szukaną długość, lub*
- *układając równanie* $17cm + |AD| + |DC| + |CB| = 56cm$ *zapomniał o jednym z boków i w rezultacie otrzymał równanie* $17cm + 2 \cdot |DC| = 56cm$*, po czym poprawnie je rozwiązał,*
- *uczeń nie uzasadnił równości kątów naprzemianległych, ale zaznaczył je na rysunku i poprowadził poprawne rozumowanie na tej podstawie.*

*Uczeń otrzymuje **2 punkty**, jeśli jego rozwiązanie stanowi co najmniej połowę poprawnego rozwiązania zadania, np.*

- *uczeń zauważył kąty naprzemianległe i trójkąty równoramienne, ale nie wyciągnął stąd wniosku, że trapez ma trzy boki tej samej długości i nie obliczył długości podstawy.*

*Uczeń otrzymuje **1 punkt**, jeśli jego rozwiązanie zawiera wartościowe elementy potrzebne do rozwiązania zadania, ale jest to mniej niż połowa rozwiązania, np.*

- *ułożył równanie* $17cm + 3 \cdot |DC| = 56cm$ *(a nawet je rozwiązał), ale rozwiązanie nie zawiera żadnych informacji o tym, dlaczego trzy boki trapezu mają jednakową długość (nie ma zaznaczonych kątów naprzemianległych, uczeń nie podał argumentu o trójkącie równoramiennym), lub*
- *uczeń zauważył kąty naprzemianległe, ale nie dostrzegł trójkąta równoramiennego, a co za tym idzie - nie obliczył szukanej długości.*

Zadanie 8. (0-4)

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

Oznaczmy liczbę dużych opakowań przez x. Wtedy liczbę jajek w dużych opakowaniach możemy zapisać jako $10x$. Liczba małych opakowań jest o 12 większa niż liczba dużych opakowań, więc jest równa $x+12$. W takim razie liczbę jajek w małych opakowaniach możemy zapisać jako $6(x+12)$. Wiedząc, że w dużych opakowaniach było o 20 jajek więcej niż w małych, możemy zapisać równanie:

$6(x+12)+20=10x$.

Rozwiązując równanie otrzymujemy kolejno:

$6x+72+20=10x$

$92=4x$

$x=23$

W takim razie pani Halinka zamówiła 23 duże opakowania jajek, w których było 230 jajek. W małych opakowaniach było o 20 jajek mniej, czyli 210 jajek. Łącznie pani Halinka zamówiła $230+210=440$ jajek.

Odpowiedź: Pani Halinka zamówiła 440 jajek.

SCHEMAT OCENIANIA

*Uczeń otrzymuje **4 punkty**, jeśli za pomocą poprawnego rozumowania uzyskał prawidłowy wynik.*

*Uczeń otrzymuje **3 punkty**, jeśli popełnił jeden niewielki błąd w rozumowaniu lub obliczeniach, np.*

- *uczeń pomylił się jeden raz w obliczeniach (jeśli na końcu otrzymał wynik niecałkowity, powinien to zauważyć i napisać komentarz, w przeciwnym przypadku otrzymuje 2 punkty),*
- *uczeń pomylił w jednym miejscu „mniej” z „więcej”, zamieniając w układanym wyrażeniu algebraicznym plus na minus lub odwrotnie, po czym poprawnie rozwiązał równanie (jeśli na końcu otrzymał wynik niecałkowity, powinien to zauważyć i napisać komentarz, w przeciwnym przypadku otrzymuje 2 punkty),*
- *uczeń ułożył poprawne równanie i je rozwiązał, ale nie obliczył łącznej liczby jajek, które zamówiła pani Halinka.*

*Uczeń otrzymuje **2 punkty**, jeśli jego rozwiązanie stanowi co najmniej połowę poprawnego rozwiązania zadania, np.*

- *uczeń pomylił się jeden raz w obliczeniach, otrzymał wynik niecałkowity i w żaden sposób się do tego nie odniósł,*
- *uczeń pomylił się kilka razy w obliczeniach, ale ogólna metoda rozwiązania jest poprawna,*
- *uczeń pomylił w jednym miejscu „o ileś więcej” z „ileś razy więcej”, po czym poprawnie rozwiązał równanie.*

*Uczeń otrzymuje **1 punkt**, jeśli jego rozwiązanie zawiera wartościowe elementy potrzebne do rozwiązania zadania, ale jest to mniej niż połowa rozwiązania, np.*

- *uczeń ułożył poprawne równanie, ale go nie rozwiązał,*
- *uczeń popełnił drobny błąd układając równanie, ale częściowo je rozwiązał.*

Uwaga: Nawet jeśli uczeń wybrał podobną metodę rozwiązania zadania, wykorzystującą równanie, mógł wybrać inną wartość do oznaczenia za pomocą zmiennej lub w inny sposób ująć informacje z zadania za pomocą równania. Obie te rzeczy nie mają wpływu na punktację, bierzemy pod uwagę jedynie poprawność rozumowania i obliczeń.

Zadanie 9. (0-4)

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

Najpierw ustalimy, które ze ścian mają największe/najmniejsze pole. Zauważmy, że pole każdej ze ścian, przemnożone przez długość krawędzi do niej prostopadłej daje objętość. Stąd ściana o najmniejszym polu jest prostopadła do najdłuższej krawędzi, a ściana o największym polu jest prostopadła do najkrótszej krawędzi.

Na początku pudełko zostało ustawione na ścianie o najmniejszym polu i miało wysokość 15cm. Woda sięgała na wysokość 12cm, więc wypełniała $\frac{12}{15} = \frac{4}{5}$ pudełka.

Po przestawieniu pudełka na ścianę o największym polu, pudełko ma wysokość 7cm. Skoro woda wypełnia $\frac{4}{5}$ pudełka, to sięga na wysokość $7\text{cm} \cdot \frac{4}{5} = 5\frac{3}{5}\text{cm}$.

Odpowiedź: Po przestawieniu woda sięga na wysokość $5\frac{3}{5}$cm.

Uwaga: Obie części rozumowania można przeprowadzić na różne sposoby, np.:

- *obliczając pola poszczególnych ścian i na tej podstawie wybierając największe i najmniejsze pole ściany,*
- *wybierając ścianę o najmniejszym polu jako „tę o dwóch najkrótszych krawędziach” i analogicznie ścianę o największym polu,*
- *obliczając objętość wody (najmniejsze pole ściany razy podana w zadaniu wysokość) i wstawiając ją do wzoru dla innego pola podstawy (największego pola ściany).*

Uczeń otrzymuje punkty niezależnie od wybranej metody rozwiązania, o ile jest poprawna.

SCHEMAT OCENIANIA

*Uczeń otrzymuje **4 punkty**, jeśli za pomocą poprawnego rozumowania uzyskał prawidłowy wynik.*

*Uczeń otrzymuje **3 punkty**, jeśli popełnił jeden niewielki błąd w rozumowaniu lub obliczeniach, np.*

- *uczeń pomylił się jeden raz w obliczeniach i otrzymał błędny wynik, ale nie wpłynęło to na poprawność reszty rozumowania.*

*Uczeń otrzymuje **2 punkty**, jeśli jego rozwiązanie stanowi co najmniej połowę poprawnego rozwiązania zadania, np.*

- *uczeń błędnie określił, które ściany mają największe i najmniejsze pole, a później przeprowadził poprawne rozumowanie na temat objętości,*
- *uczeń poprawnie określił, które ściany mają największe i najmniejsze pole, oraz obliczył jaką część prostopadłościanu zajmuje woda lub jaką ma objętość, ale nie obliczył wysokości, na jaką sięga woda.*

*Uczeń otrzymuje **1 punkt**, jeśli jego rozwiązanie zawiera wartościowe elementy potrzebne do rozwiązania zadania, ale jest to mniej niż połowa rozwiązania, np.*

- *uczeń poprawnie określił, które ściany mają największe i najmniejsze pole,*
- *uczeń poprawnie wybrał ścianę o najmniejszym polu i obliczył objętość wody.*