KONKURS Z MATEMATYKI
DLA UCZNIÓW SZKÓŁ PODSTAWOWYCH

ETAP SZKOLNY
KLUCZ ODPOWIEDZI

Część I - zadania krótkiej odpowiedzi

W zadaniach krótkiej odpowiedzi (zadania od 1 do 6) ocenie podlega jedynie odpowiedź, umieszczona przez ucznia w wyznaczonym miejscu arkusza. Za każde zadanie krótkiej odpowiedzi można uzyskać 2 punkty za poprawną odpowiedź. W niektórych zadaniach możliwe jest również przyznanie 1 punktu za niepoprawną odpowiedź, o ile jest ona wymieniona w poniższej tabeli (odpowiedzi te świadczą o prawidłowym sposobie postępowania ucznia, połączonym z drobnym błędem w obliczeniach lub rozumowaniu). Szczegółowe uzasadnienie takiej punktacji znajduje się pod przykładowymi rozwiązaniami poszczególnych zadań.

	Prawidłowa odpowiedź (2 punkty)	**Częściowo poprawna odpowiedź (1 punkt)**
Zadanie 1.	1557	*inna liczba postaci* $15x7$ *albo jedna z liczb:* $1503, 1512, 1521, 1530, 1539, 1548, 1566, 1575, 1584, 1593$
Zadanie 2.	18193	*inny całkowity wynik większy od* 18182 *i mniejszy od* 18204
Zadanie 3.	8	7 *albo* 9
Zadanie 4.	24	
Zadanie 5.	159	$155, 156, 157, 158, 160, 161, 162$ *albo* 163
Zadanie 6.	1463	

Uwaga! Uczeń nie musi umieć uzasadnić poprawności rozumowania ani opisać jego szczegółów. Zadania krótkiej odpowiedzi dopuszczają rozumowania intuicyjne, metodę prób i błędów oraz inne sposoby prowadzące ucznia do uzyskania prawidłowego wyniku. Opisane poniżej przykładowe rozwiązania służą wyjaśnieniu poprawnych odpowiedzi umieszczonych w kluczu oraz stanowią materiał edukacyjny, do wykorzystania np. na kółku matematycznym.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIA

Zadanie 1.

Skoro Alek ma więcej niż 1500 znaczków, ale mniej niż 1600, to liczbę jego znaczków można wyrazić w postaci $15xy$, gdzie x i y są pewnymi cyframi. Kiedy Alek grupował znaczki po 10, w ostatniej grupie zostało mu 7 znaczków, a to oznacza, że liczba znaczków daje z dzielenia przez 10 resztę 7. W takim razie cyfra jedności y musi być równa właśnie 7 i liczba znaczków ma postać $15x7$.

Skoro udało się Alkowi pogrupować znaczki po 9, to liczba znaczków musi być podzielna przez 9, a co za tym idzie - suma jej cyfr musi dzielić się przez 9. Stąd $1 + 5 + x + 7 = 13 + x$ musi być podzielne przez 9. Ponieważ x jest cyfrą, jest to możliwe tylko dla $x = 5$. W takim razie Alek ma 1557 znaczków.

Uwaga: Zadanie można rozwiązać na wiele innych sposobów, np. wypisując liczby postaci $15xy$ podzielne przez 9 i szukając wśród nich takich, które przy dzieleniu przez 10 dadzą resztę 7.
Uczeń przy obu metodach może popełnić niewielki błąd obliczeniowy, dlatego za podanie liczby spełniającej przynajmniej jeden warunek o podzielności przyznajemy część punktów.

Zadanie 2.

Liczba 10^{2022} ma postać $1\underbrace{00\ldots00}_{2022\ zer}$.

Wyobraźmy sobie, że wykonujemy pisemnie odejmowanie $10^{2022} - 2022$.
W rzędzie jedności mamy do wykonania odejmowanie 2 od 0, więc musimy dokonać „pożyczenia". W czasie tego procesu „zabieramy" jedynkę z odjemnej, wszystkie zera „zamieniają się" w dziewiątki, poza ostatnim, które będzie mieć wartość 10. Teraz możemy już wykonać odejmowanie w rzędzie jedności: $10 - 2 = 8$. W rzędzie dziesiątek otrzymujemy $9 - 2 = 7$, w rzędzie setek mamy $9 - 0 = 9$, a w rzędzie tysięcy dostajemy $9 - 2 = 7$. W kolejnych 2018-tu rzędach przepisujemy dziewiątkę z odjemnej do wyniku. Otrzymaliśmy w wyniku liczbę $\underbrace{99\ldots99}_{2018\ cyfr}7978$.

Suma cyfr tej liczby jest równa $2018 \cdot 9 + 7 + 9 + 7 + 8 = 18193$.

Uwaga: uczeń może dokonać drobnego błędu w obliczeniach lub w zliczaniu zer/ dziewiątek powtarzających się w liczbie. Za wynik różniący się o co najwyżej dziesięć od prawidłowego przyznajemy część punktów.

Zadanie 3.
Zacznijmy od zastanowienia się, ile różnych dzielników pierwszych może mieć liczba naturalna, która ma dokładnie 3 dzielniki.

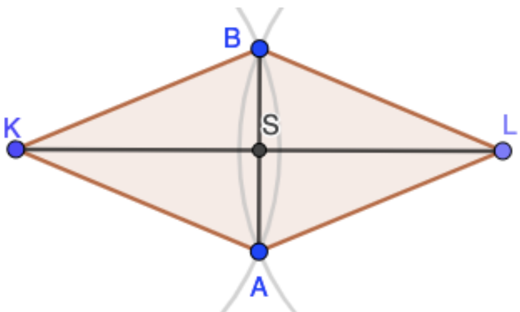
Spróbujmy rozważyć liczby, które mają dokładnie jeden dzielnik pierwszy p, czyli są postaci p^n, gdzie n jest pewną liczbą naturalną. Dzielnikami takiej liczby są wszystkie potęgi liczby p od zerowej (jest to dzielnik równy 1), aż po n-tą. Jeśli chcemy, by liczba tej postaci miała trzy dzielniki, to musi zachodzić równość $n = 2$ (dzielnikami liczb postaci p^2 są 1, p i p^2). Sprawdzimy, ile jest liczb tej postaci mniejszych od 400. Nierówność $p^2 < 400$ zachodzi dla liczb pierwszych p mniejszych od 20. Takich liczb pierwszych jest 8 - są to 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 i 19. W takim razie również liczb o 3 dzielnikach postaci p^2 i mniejszych od 400 jest 8.

Rozważmy teraz, czy interesujące nas liczba może mieć co najmniej dwa różne dzielniki pierwsze p i q. Taka liczba dzieliłaby się przez 1, p, q i pq, a są to cztery różne liczby naturalne.

W takim razie jedynymi liczbami spełniającymi warunki zadania są liczby postaci p^2 i jest ich osiem.

Uwaga: uczeń mógł przeprowadzić kluczową część rozumowania, ale pomylić się przy zliczaniu liczb pierwszych mniejszych od 20. W związku z tym za odpowiedź różniącą się o 1 od prawidłowej przyznajemy część punktów.

Zadanie 4.
Oznaczmy środki okręgów przez K i L, a ich punkty przecięcia przez A i B. Zauważmy, że odcinki KA, KB, LA i LB są promieniami odpowiednich okręgów i mają długość 13cm. W takim razie czworokąt $KALB$ jest rombem o boku długości 13cm.



Jego przekątne przecinają się pod kątem prostym i dzielą się na połowy. Oznaczmy punkt przecięcia tych przekątnych przez S.

Mamy $|AS| = |BS| = 5$cm. Oznaczmy też $x = |KS| = |LS|$. Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ASK otrzymujemy równość:

$|AS|^2 + |KS|^2 = |AK|^2$, a stąd

$(5\text{cm})^2 + x^2 = (13\text{cm})^2$, czyli

$x^2 = (13\text{cm})^2 - (5\text{cm})^2$, a stąd

$x^2 = 144\text{cm}^2$, więc

$x = 12\text{cm}$.

Możemy już obliczyć odległość między środkami okręgów:

$|KL| = |KS| + |SL| = 2x = 2 \cdot 12\text{cm} = 24\text{cm}$.

Zadanie 5.

W zadaniu mowa jest o liczbach naturalnych n, dla których $\sqrt{n}$ jest odległy na osi liczbowej od liczby 8 o mniej niż 5. W takim razie $\sqrt{n}$ musi znajdować się na osi liczbowej pomiędzy $8 - 5 = 3$ a $8 + 5 = 13$ (ale z wyłączeniem tych końców).

Aby $\sqrt{n}$ był większy od 3, musi zachodzić $n > 9$. Podobnie aby $\sqrt{n}$ był mniejszy od 13, musi zachodzić $n < 169$. Jeśli liczba naturalna n spełnia oba te warunki, czyli jest liczbą pomiędzy 9 a 169, to faktycznie spełnia warunki zadania.

Musimy więc zliczyć liczby naturalne, które są większe od 9 i jednocześnie mniejsze od 169, czyli liczby od 10 do 168. Jest ich $168 - 10 + 1 = 159$.

Uwaga: Uczniowie często mylą się przy zliczaniu liczb z podanego zakresu, mogą również pomylić warunek odległości „mniejszej niż 5” z odległością „nie większą niż 5”. Dlatego za odpowiedź różniącą się od prawidłowej o co najwyżej 4 przyznajemy część punktów.

Zadanie 6.

Oznaczmy iloraz, który otrzymujemy z dzielenia 1680 przez n, jako k. Wówczas spełniona jest równość $1680 = n \cdot k + 217$. Ponadto liczba 217 jako reszta z dzielenia musi być mniejsza niż n.

Przekształcając równość otrzymujemy $n \cdot k = 1680 - 217 = 1463$. W takim razie liczba n musi być pewnym dzielnikiem liczby 1463 większym od 217.

Na pewno liczbą spełniającą te warunki jest $n = 1463$.

Aby sprawdzić, czy są inne liczby spełniające warunki zadania, rozłóżmy liczbę 1463

na czynniki pierwsze. Otrzymujemy $1463 = 7 \cdot 11 \cdot 19$. Największym dzielnikiem tej liczby, różnym od niej samej jest $11 \cdot 19 = 209$, ale jest to liczba mniejsza od 217.

W takim razie jedyną liczbą spełniającą warunki zadania jest 1463.

Uwaga: Jest to zadanie krótkiej odpowiedzi, w którym uczeń nie musi uzasadniać swojego wyniku. W szczególności uczeń może nie umieć udowodnić, że 1463 *jest jedyną liczbą spełniającą warunki zadania. Wystarczającym rozwiązaniem (dającym maksymalną liczbę punktów) jest jej znalezienie.*

Część II - zadania otwarte

Zadanie 7. (0-4)

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

Oznaczmy przez x liczbę monet pięciozłotowych w skarbonce Stasia. Liczba monet dwuzłotowych jest dwa razy większa, możemy ją więc wyrazić przez $2x$.

Wartość monet pięciozłotowych to $x \cdot 5$, a wartość monet dwuzłotowych opisuje wyrażenie $2x \cdot 2$. Skoro wartość monet pięciozłotowych jest o 30 złotych większa niż wartość monet dwuzłotowych, możemy zapisać równanie:
$5 \cdot x = 2x \cdot 2 + 30.$

Rozwiązując powyższe równanie otrzymujemy kolejno:
$5x = 4x + 30$
$x = 30$

W takim razie Staś ma 30 monet pięciozłotowych i 60 monet dwuzłotowych.

Odpowiedź: Staś ma w skarbonce 60 monet dwuzłotowych.

SCHEMAT OCENIANIA

Uczeń otrzymuje ***4 punkty****, jeśli za pomocą poprawnego rozumowania uzyskał prawidłowy wynik.*

Uczeń otrzymuje ***3 punkty****, jeśli popełnił jeden niewielki błąd w rozumowaniu lub obliczeniach, np.*

- *uczeń pomylił się jeden raz w obliczeniach (jeśli na końcu otrzymał wynik niecałkowity, powinien to zauważyć i napisać komentarz, w przeciwnym przypadku otrzymuje 2 punkty),*
- *uczeń pomylił w jednym miejscu „mniej” z „więcej”, zamieniając w układanym wyrażeniu algebraicznym plus na minus (albo razy na podzielić) lub odwrotnie, po czym poprawnie rozwiązał równanie (jeśli na końcu otrzymał wynik niecałkowity, powinien to zauważyć i napisać komentarz, w przeciwnym przypadku otrzymuje 2 punkty),*
- *uczeń ułożył poprawne równanie i je rozwiązał, ale nie obliczył odpowiedzi (np. z równania otrzymał liczbę monet pięciozłotowych i nie obliczył liczby monet dwuzłotowych).*

Uczeń otrzymuje ***2 punkty****, jeśli jego rozwiązanie stanowi co najmniej połowę poprawnego rozwiązania zadania, np.*

- *uczeń pomylił się jeden raz w obliczeniach, otrzymał wynik niecałkowity i w żaden sposób się do tego nie odniósł,*
- *uczeń pomylił się kilka razy w obliczeniach, ale ogólna metoda rozwiązania jest poprawna,*
- *uczeń pomylił w jednym miejscu „dwa razy więcej” z „o dwa więcej”, po czym poprawnie rozwiązał równanie.*

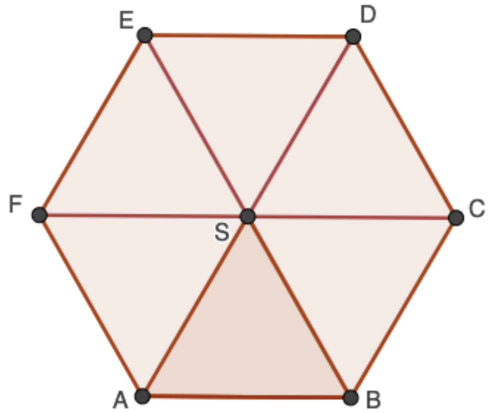
Uczeń otrzymuje ***1 punkt****, jeśli jego rozwiązanie zawiera wartościowe elementy potrzebne do rozwiązania zadania, ale jest to mniej niż połowa rozwiązania, np.*

- *uczeń ułożył poprawne równanie, ale go nie rozwiązał,*
- *uczeń popełnił drobny błąd układając równanie i rozwiązał je częściowo.*

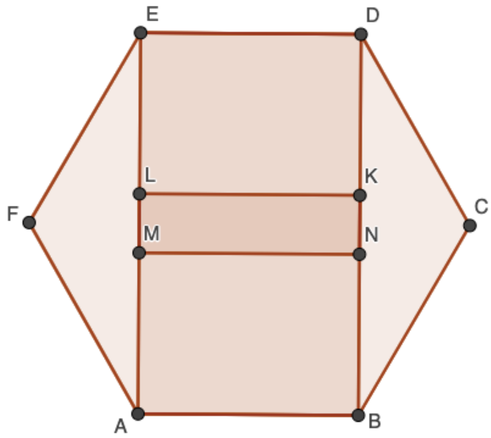
Uwaga: Nawet jeśli uczeń wybrał podobną metodę rozwiązania zadania, wykorzystującą równanie, mógł wybrać inną wartość do oznaczenia za pomocą zmiennej (np. liczbę monet dwuzłotowych) lub w inny sposób ująć informacje z zadania za pomocą równania. Obie te rzeczy nie mają wpływu na punktację, bierzemy pod uwagę jedynie poprawność rozumowania i obliczeń.

Zadanie 8. (0-4)

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE



Z własności sześciokąta foremnego wiemy, że jego dłuższe przekątne przecinają się w jednym punkcie i dzielą sześciokąt na sześć trójkątów równobocznych. Oznaczmy punkt przecięcia tych przekątnych sześciokąta $ABCDEF$ przez S.



Na początku obliczymy odległość między prostymi AB i DE. Jest to długość odcinka AE, który składa się z wysokości trójkątów ASF i EFS opuszczonych na bok FS. Ze wzoru na wysokość trójkąta równobocznego wiemy, że każda z tych wysokości ma długość $\frac{4\text{cm} \cdot \sqrt{3}}{2}$, a stąd mamy $|AE| = 4\sqrt{3}$cm. Zwróćmy uwagę, że ta wartość jest mniejsza od 8cm, ponieważ $\sqrt{3}$ jest mniejszy od 2.

Odcinki AL i EM mają długość 4cm i leżą na odcinku AE. W takim razie muszą nachodzić na siebie. Część wspólna tych odcinków to LM i ma długość

$$|LM| = |AE| - |AM| - |EL| = |AE| - (|AE| - |EM|) - (|AE| - |AL|) =$$
$$= |EM| + |AL| - |AE| = 8\text{cm} - 4\sqrt{3}\text{cm}.$$

Czworokąt $KLMN$ jest prostokątem, obliczymy jego pole mnożąc długości boków:

$$P_{KLMN} = |KL| \cdot |LM| = 4 \cdot (8 - 4\sqrt{3})\text{cm}^2 = (32 - 16\sqrt{3})\text{cm}^2.$$

Odpowiedź: Pole czworokąta $KLMN$ jest równe $(32 - 16\sqrt{3})\text{cm}^2$.

SCHEMAT OCENIANIA

Uczeń otrzymuje ***4 punkty****, jeśli za pomocą poprawnego rozumowania uzyskał prawidłowy wynik. Wynik może być przedstawiony w różnej postaci, maksymalną liczbę punktów przyznajemy za wyrażenie nie bardziej skomplikowane niż* $4(8-4\sqrt{3})\text{cm}^2$ (np. $32\text{cm}^2 - 16\sqrt{3}\text{cm}^2$ lub $16(2-\sqrt{3})\text{cm}^2$). *Wynik uznajemy za prawidłowy również jeśli zostanie podany bez jednostki.*

Uczeń otrzymuje ***3 punkty****, jeśli popełnił jeden niewielki błąd w rozumowaniu lub obliczeniach, np.*

- *nie uzasadnił wprost nietrudnego spostrzeżenia na temat położenia figur, np. nie uzasadnił, że kwadraty będą na siebie „nachodzić", ale umieścił je prawidłowo na rysunku i pozostałe rozumowanie przeprowadził prawidłowo,*
- *popełnił błąd rachunkowy, który nie miał wpływu na trudność rozumowania, np. błędnie obliczył odległość* $|AE|$*, ale była ona dłuższa niż* 4cm *i krótsza niż* 8cm *lub pomylił się wykonując mnożenie przy obliczaniu pola prostokąta,*
- *uczeń zapisał prawidłowe wyrażenie arytmetyczne opisujące pole prostokąta, ale nie obliczył jego wartości.*

Uczeń otrzymuje ***2 punkty****, jeśli jego rozwiązanie stanowi co najmniej połowę poprawnego rozwiązania zadania, np.*

- *uczeń narysował kwadraty wewnątrz sześciokąta, ale na innych bokach i prawidłowo rozwiązał zadanie w takiej wersji,*
- *uczeń narysował kwadraty na dobrych bokach, ale na zewnątrz sześciokąta, i prawidłowo rozwiązał zadanie w tej wersji,*
- *popełnił jeden błąd obliczeniowy, który wpłynął na trudność zadania, np. błędnie obliczył odległość* $|AE|$ *i otrzymał wartość większą niż* 8cm*, a potem poprawnie przeprowadził resztę rozumowania zakładając, że kwadraty nie nachodzą na siebie.*

Uczeń otrzymuje ***1 punkt****, jeśli jego rozwiązanie zawiera wartościowe elementy potrzebne do rozwiązania zadania, ale jest to mniej niż połowa rozwiązania, np.*

- *uczeń prawidłowo obliczył długość wysokości jednego z trójkątów równobocznych tworzących sześciokąt,*
- *uczeń zauważył, że czworokąt* $KLMN$ *jest prostokątem o boku długości* 4cm.

Zadanie 9. (0-4)

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

Skoro Wojtkowi początkowo brakowało 3 złotych do zakupienia piłki, a po obniżce jego oszczędności przekraczały nową cenę piłki o $7{,}20$zł, to oznacza, że cena została obniżona o $10{,}20$zł. W takim razie $20\,\%$ pierwotnej ceny piłki było równe $10{,}20$zł.

Wojtek zapłacił za piłkę $80\,\%$ pierwotnej ceny, czyli 4 razy większą kwotę: $10{,}20$zł $\cdot\, 4 = 40{,}80$zł.

Odpowiedź: Wojtek zapłacił za piłkę $40{,}80$zł.

Uwaga: Naturalną metodą rozwiązania może być również użycie proporcji lub ułożenie i rozwiązanie równania. Schemat oceniania uwzględnia również przykłady dotyczące tych metod rozwiązywania.

SCHEMAT OCENIANIA

*Uczeń otrzymuje **4 punkty**, jeśli za pomocą poprawnego rozumowania uzyskał prawidłowy wynik.*

*Uczeń otrzymuje **3 punkty**, jeśli popełnił jeden niewielki błąd w rozumowaniu lub obliczeniach, np.*

- *ułożył prawidłowe równanie/działanie/proporcję, i pomylił się jeden raz w obliczeniach, ale nie zmienił znacząco trudności rozwiązania,*
- *obliczył prawidłowo pierwotną cenę piłki, ale nie obliczył kwoty, którą zapłacił Wojtek,*
- *obliczył prawidłowo wartość oszczędności Wojtka, ale nie obliczył kwoty, którą zapłacił Wojtek.*

*Uczeń otrzymuje **2 punkty**, jeśli jego rozwiązanie stanowi co najmniej połowę poprawnego rozwiązania zadania, np.*

- *ułożył prawidłowe równanie/działanie/proporcję, ale pomylił się w obliczeniach, znacząco je sobie ułatwiając,*
- *ułożył równanie, w którym w jednym miejscu umieścił kwotę ze złym znakiem (plus zamiast minus lub odwrotnie), po czym prawidłowo je rozwiązał.*

*Uczeń otrzymuje **1 punkt**, jeśli jego rozwiązanie zawiera wartościowe elementy potrzebne do rozwiązania zadania, ale jest to mniej niż połowa rozwiązania, np.*

- *ułożył prawidłowe działanie/równanie/proporcję pozwalającą obliczyć pierwotną cenę piłki, wartość oszczędności Wojtka lub kwotę zapłaconą przez Wojtka, ale nie wykonał obliczeń.*