KONKURS Z MATEMATYKI
DLA UCZNIÓW SZKÓŁ PODSTAWOWYCH

ETAP REJONOWY
KLUCZ ODPOWIEDZI

Część I - zadania krótkiej odpowiedzi

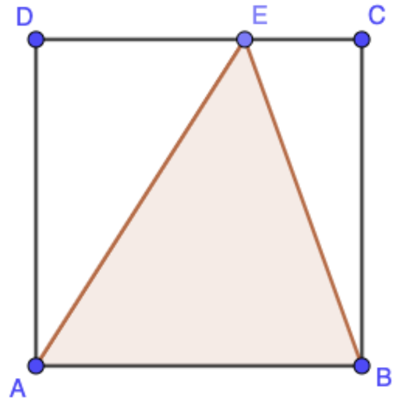
W zadaniach krótkiej odpowiedzi (zadania od 1 do 6) ocenie podlega jedynie odpowiedź, umieszczona przez ucznia w wyznaczonym miejscu arkusza. Za każde zadanie krótkiej odpowiedzi można uzyskać 2 punkty za poprawną odpowiedź. W niektórych zadaniach możliwe jest również przyznanie 1 punktu za niepoprawną odpowiedź, o ile jest ona wymieniona w poniższej tabeli (odpowiedzi te świadczą o prawidłowym sposobie postępowania ucznia, połączonym z drobnym błędem w obliczeniach lub rozumowaniu). Szczegółowe uzasadnienie takiej punktacji znajduje się pod przykładowymi rozwiązaniami poszczególnych zadań.

	Prawidłowa odpowiedź (2 punkty)	**Częściowo poprawna odpowiedź (1 punkt)**
Zadanie 1.	6*cm lub* 6	-
Zadanie 2.	0	-
Zadanie 3.	969	-
Zadanie 4.	32	-
Zadanie 5.	2dm *(może być wyrażone w innej postaci, np.* 20cm)	2 *lub* 20 *bez podania jednostki*
Zadanie 6.	1400	-

Uwaga! Uczeń nie musi umieć uzasadnić poprawności rozumowania ani opisać jego szczegółów. Zadania krótkiej odpowiedzi dopuszczają rozumowania intuicyjne, metodę prób i błędów oraz inne sposoby prowadzące ucznia do uzyskania prawidłowego wyniku. Opisane poniżej przykładowe rozwiązania służą wyjaśnieniu poprawnych odpowiedzi umieszczonych w kluczu oraz stanowią materiał edukacyjny, do wykorzystania np. na kółku matematycznym.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIA

Zadanie 1.



Pole trójkąta ABE stanowi połowę pola kwadratu, ponieważ jego podstawa AB ma długość boku kwadratu, tak samo jak jego wysokość opuszczona z wierzchołka E. W takim razie pole pozostałej części kwadratu również stanowi połowę pola całego kwadratu. Stąd

$$P_{ABCD} = 2 \cdot (P_{ADE} + P_{BCE}) = 2 \cdot (15{,}75\text{cm}^2 + 2{,}25\text{cm}^2) = 36\text{cm}^2.$$

W takim razie bok kwadratu ma długość 6cm.

Uwaga: W tym zadaniu uznajemy za poprawny również wynik zapisany bez jednostki.

Zadanie 2.

Zapiszemy wyrażenie z zadania w postaci iloczynu, wyciągając wspólny czynnik przed nawias:

$$7^{2021} + 7^{2023} = 7^{2021}(1 + 7^2) = 7^{2021} \cdot 50 = 7^{2021} \cdot 5 \cdot 10.$$

Z otrzymanego iloczynu możemy zauważyć, że liczba z zadania jest podzielna przez 10. W takim razie cyfrą jedności tej liczby jest 0.

Uwaga: Zadanie można rozwiązać również analizując reszty z dzielenia przez 10 *kolejnych potęg liczby* 7. *Liczba* 7^{2021} *ma ostatnią cyfrę równą* 7, *a* 7^{2023} *ma ostatnią cyfrę równą* 3. *W takim razie ich suma ma ostatnią cyfrę równą* 0.

Zadanie 3.

Sumując liczbę trzycyfrową z liczbą 2023 otrzymujemy liczbę pomiędzy 2123 a 3022. W takim razie wynik ma być czterocyfrowym palindromem, rozpoczynającym się od cyfry 2 lub 3. Rozważymy dwa przypadki.

Przypuśćmy, że wynik rozpoczyna się cyfrą 3. Wówczas musiałby być zakończony również cyfrą 3, ponieważ ma być palindromem. Skoro ostatnie cyfry w drugim składniku dodawania i w wyniku są jednakowe, ostatnią cyfrą pierwszego składnika musiałoby być 0. Jest to jednak niemożliwe, skoro ma to być palindrom.

Rozpatrzmy teraz sytuację, w której wynik rozpoczyna się i kończy cyfrą 2. Znajdziemy ostatnią cyfrę szukanego składnika dodawania. Po jej zsumowaniu z 3 (jest to ostatnia cyfra 2023) mamy uzyskać liczbę zakończoną na 2. Jest to możliwe tylko dla cyfry równej 9. Ponieważ szukany składnik ma być palindromem, jego pierwszą cyfrą musi być również 9.

Sumując liczbę 2023 ze składnikiem postaci $9x9$ (gdzie x oznacza cyfrę dziesiątek) otrzymujemy liczbę większą od 2900. Jednocześnie ma to być palindrom mniejszy od 3000 (wynik rozpoczynający się cyfrą 3 rozważaliśmy już wcześniej). W takim razie wynikiem działania jest 2992, a szukanym składnikiem jest liczba $2992 - 2023 = 969$.

Zadanie 4.
Na samym końcu opisanej sytuacji w szufladach nadal znajdują się łącznie 72 długopisy. Wiemy również, że w pierwszej i drugiej szufladzie jest tyle samo długopisów, a w trzeciej tyle, ile w dwóch pierwszych razem. To oznacza, że łączna liczba długopisów jest czterokrotnością liczby długopisów w pierwszej szufladzie. W takim razie jest w niej $72 : 4 = 18$ długopisów. W drugiej szufladzie również jest 18 długopisów, a w trzeciej jest 36 długopisów.

Przypatrzymy się teraz sytuacji przed ostatnim przekładaniem długopisów, w którym z pierwszej szuflady przełożono do trzeciej 20 długopisów. Oznacza to, że liczby długopisów w szufladach były wcześniej równe odpowiednio 38, 18 i 16.

Jeszcze wcześniejszym działaniem było przełożenie połowy długopisów z trzeciej szuflady do drugiej. W trzeciej szufladzie musiało być przedtem dwa razy więcej długopisów niż po tym przekładaniu, czyli 32.

Uwaga: Można również wyznaczyć również liczbę długopisów na początku w pozostałych szufladach. Jest to odpowiednio 38 i 2. Nie jest to jednak potrzebne do rozwiązania zadania.

Zadanie 5.
Oznaczmy długość krawędzi sześcianu przez a.

Zauważmy, że woda po postawieniu pudełka na krawędzi przybrała kształt ostrosłupa trójkątnego. Podstawą tego ostrosłupa jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości $\frac{1}{2}a$. Stąd pole podstawy graniastosłupa jest równe $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}a = \frac{1}{8}a^2$.

Wysokością tego graniastosłupa jest krawędź sześcianu. W takim razie jego objętość możemy wyrazić za pomocą wyrażenia $\frac{1}{8}a^2 \cdot a = \frac{1}{8}a^3$.

Wykorzystując informację o objętości wody otrzymujemy równanie pozwalające obliczyć długość krawędzi sześcianu:

$$\frac{1}{8}a^3 = 1\text{dm}^3,$$

a stąd $a^3 = 8\text{dm}^3$. W takim razie krawędź sześcianu ma długość $a = 2\text{dm}$.

Uwaga: Dla części uczniów może być naturalne prowadzenie obliczeń w centymetrach lub ewentualnie innych jednostkach. Podanie odpowiedzi 2 lub 20 bez jednostki skutkuje przyznaniem tylko części punktów.

Zadanie 6.

Oznaczmy przez x liczbę osób biorących udział w ankiecie. Kobiety stanowiły $45\,\%$ tej liczby, czyli $0{,}45x$.

Kandydat A otrzymał $60\,\%$ głosów kobiet, było ich $60\% \cdot 0{,}45x = 0{,}6 \cdot 0{,}45x$. Natomiast kandydat B otrzymał $40\,\%$ głosów kobiet, czyli
$40\% \cdot 0{,}45x = 0{,}4 \cdot 0{,}45x$.

Obaj kandydaci otrzymali po tyle samo głosów od mężczyzn. Wiemy, że kandydat A otrzymał łącznie o 126 głosów więcej, musiał więc otrzymać o 126 głosów kobiet więcej. W takim razie otrzymujemy zależność $0{,}6 \cdot 0{,}45x - 0{,}4 \cdot 0{,}45x = 126$.

Rozwiązując to równanie otrzymujemy kolejno:

$(0{,}6 - 0{,}4) \cdot 0{,}45x = 126$

$0{,}2 \cdot 0{,}45x = 126$

$0{,}09x = 126$

$9x = 12600$

$x = 1400$

W takim razie w ankiecie wzięło udział 1400 kandydatów.

Część II - zadania otwarte

Zadanie 7. (0-4)

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

Zauważmy, że liczba $k+5$ jest liczbą całkowitą większą od 5. Aby liczba $\frac{91}{k+5}$ była całkowita, liczba $k+5$ musi być dzielnikiem liczby 91.

Przyjrzymy się rozkładowi liczby 91 na czynniki pierwsze. Jest to $91 = 7 \cdot 13$. W takim razie dzielnikami liczby 91 są liczby 1, 7, 13 i 91. Wśród nich tylko trzy ostatnie są większe od 5. Wiemy więc, że liczba $k+5$ musi przyjmować wartość 7, 13 lub 91. Stąd k jest równe 2, 8 lub 86. Łatwo można sprawdzić, że po podstawieniu do ułamka każda z tych wartości da nam całkowity wynik.

Odpowiedź: Szukanymi wartościami k są 2, 8 i 86.

SCHEMAT OCENIANIA

*Uczeń otrzymuje **4 punkty**, jeśli za pomocą poprawnego rozumowania uzyskał prawidłowy wynik (uczeń musi wyznaczyć poprawnie wszystkie trzy wartości k, jednocześnie nie podając żadnej błędnej wartości oraz uzasadnić ten wynik).*

*Uczeń otrzymuje **3 punkty**, jeśli popełnił jeden niewielki błąd w rozumowaniu lub obliczeniach, np.*

- *rozwiązał zadanie pomijając warunek mówiący, że k ma być dodatnie i w odpowiedzi podał wartości* $-96, -18, -12, -6, -4, 2, 8$ *i* 86,
- *poprawnie wyznaczył wszystkie możliwe wartości $k+5$, ale popełnił błąd rachunkowy obliczając na tej podstawie wartości k.*

*Uczeń otrzymuje **2 punkty**, jeśli jego rozwiązanie stanowi co najmniej połowę poprawnego rozwiązania zadania, np.*

- *pomylił się sprawdzając czy liczba 91 jest pierwsza i uznał, że tak, po czym wyznaczył wartość $k = 86$,*
- *błędnie rozłożył liczbę 91 na czynniki pierwsze, po czym poprawnie wywnioskował z rozkładu jakie są wszystkie dzielniki i wyznaczył z nich możliwe wartości k,*
- *poprawnie rozłożył liczbę 91 na czynniki pierwsze, po czym rozważył tylko wartości $k+5$ będące liczbami pierwszymi, podając w wyniku wartości 2 i 8,*
- *rozwiązał zadanie pomijając warunek mówiący, że k ma być dodatnie , ale wziął pod uwagę jedynie dodatnie wartości $k+5$ i w odpowiedzi podał wartości* $-4, 2, 8$ *i* 86.

*Uczeń otrzymuje **1 punkt**, jeśli jego rozwiązanie zawiera wartościowe elementy potrzebne do rozwiązania zadania, ale jest to mniej niż połowa rozwiązania, np.*

- *poprawnie rozłożył 91 na czynniki pierwsze,*
- *zauważył, że $k+5$ musi być dzielnikiem liczby 91,*
- *znalazł niektóre lub wszystkie poprawne wartości k, ale w żaden sposób ich nie uzasadnił (brak jakichkolwiek obliczeń i komentarza w czystopisie).*

Zadanie 8. (0-4)

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

Na początku określmy założenia i tezę twierdzenia, które mamy udowodnić.

Założenie: liczby a, b są rzeczywiste oraz $a - b = \sqrt{11}$ i $a + b = \sqrt{23}$

Teza: $a \cdot b = 3$

Dowód: Skoro $a - b = \sqrt{11}$, to wiemy również, że $(a-b)^2 = 11$. Wymnażając lewą stronę równości (lub rozwijając ją ze wzoru skróconego mnożenia) otrzymujemy stąd, że $a^2 - 2ab + b^2 = 11$.

Podobnie skoro mamy $a + b = \sqrt{23}$, to zachodzi też równość $(a+b)^2 = 23$. Wymnażając lewą stronę otrzymujemy stąd $a^2 + 2ab + b^2 = 23$.

W takim razie prawdziwa jest również równość
$(a^2 + 2ab + b^2) - (a^2 - 2ab + b^2) = 23 - 11$.

Po uproszczeniu obu stron równości otrzymujemy $4ab = 12$. Po podzieleniu obu stron równości przez 4 otrzymujemy, że prawdziwa jest także równość $ab = 3$, co mieliśmy udowodnić.

SCHEMAT OCENIANIA

Uczeń otrzymuje ***4 punkty****, jeśli za pomocą poprawnego rozumowania przeprowadził pełny dowód. Otrzymuje je również, jeśli nie wypisał wprost założeń i tezy, ale przeprowadzone rozumowanie jest poprawnym dowodem.*

Uczeń otrzymuje ***3 punkty****, jeśli popełnił jeden niewielki błąd w rozumowaniu lub obliczeniach, np.*

- *popełnił jeden drobny błąd rachunkowy i z tego względu otrzymał zamiast tezy inną wartość wyrażenia ab, ale zauważył to i skomentował, że musi to oznaczać błąd w zadaniu lub jego obliczeniach.*

Uczeń otrzymuje ***2 punkty****, jeśli jego rozwiązanie stanowi co najmniej połowę poprawnego rozwiązania zadania, np.*

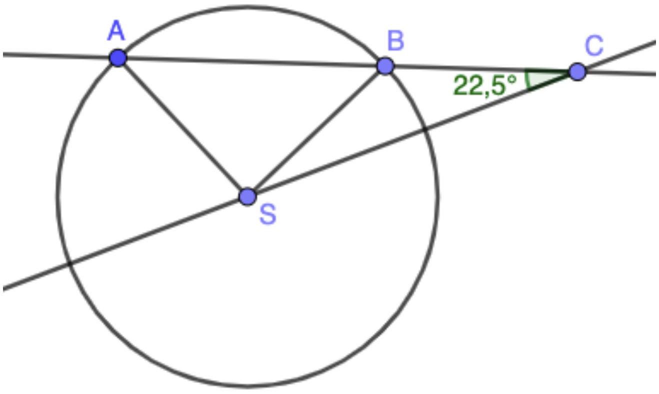
- *uzasadnił, że prawdziwe są równości $a^2 + 2ab + b^2 = 23$ i $a^2 - 2ab + b^2 = 11$, ale nie doprowadził dowodu do końca,*
- *popełnił błąd korzystając z wzoru skróconego mnożenia oraz pomylił się przy odejmowaniu równań, otrzymując w ten sposób tezę,*
- *popełnił drobne błędy rachunkowe i z tego względu otrzymał zamiast tezy inną wartość wyrażenia ab.*

Uczeń otrzymuje ***1 punkt****, jeśli jego rozwiązanie zawiera wartościowe elementy potrzebne do rozwiązania zadania, ale jest to mniej niż połowa rozwiązania, np.*

- *uczeń prawidłowo określił założenia i tezę oraz podniósł co najmniej jedno z równań danych w założeniach do kwadratu (np. zapisał równość postaci $(a-b)^2 = 11$, $a^2 - 2ab + b^2 = 11$ lub analogiczną).*

Zadanie 9. (0-4)

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE



Skoro odcinek BC ma taką samą długość jak promień koła, to trójkąt BSC jest równoramienny. W takim razie $|\sphericalangle BSC| = |\sphericalangle BCS| = 22{,}5^\circ$.

Korzystając z faktu, że suma kątów trójkąta BSC jest równa 180°, mamy

$$|\sphericalangle SBC| = 180^\circ - |\sphericalangle BSC| - |\sphericalangle BCS| = 135^\circ.$$

W takim razie kąt SBA, jako kąt przyległy do kąta SBC, ma miarę 45°.

Trójkąt SBA jest równoramienny (SA i SB mają długość promienia koła) i jego kąt przy podstawie ma miarę 45°. W takim razie $|AB| = \sqrt{2} \cdot |AS|$. Skoro odcinek AB ma długość 4cm, możemy obliczyć $|AS| = \dfrac{4}{\sqrt{2}}$cm.

Korzystając ze wzoru na pole koła, możemy teraz obliczyć, że jest ono równe

$$\pi \cdot \left(\frac{4}{\sqrt{2}}\text{cm}\right)^2 = 8\pi\text{cm}^2.$$

Odpowiedź: Koło ma pole 8πcm^2.

Uwaga: W tym zadaniu odpowiedź uznajemy za poprawną również w sytuacji, gdy uczeń podał ją bez jednostek.

SCHEMAT OCENIANIA

Uczeń otrzymuje ***4 punkty****, jeśli za pomocą poprawnego rozumowania uzyskał prawidłowy wynik w postaci* 8π *cm*^{2} *lub* 8π.

Uczeń otrzymuje ***3 punkty****, jeśli popełnił jeden niewielki błąd w rozumowaniu lub obliczeniach, np.*

- *zauważył oba trójkąty równoramienne i prawidłowo obliczył ich kąty, ale popełnił jeden błąd rachunkowy przy obliczaniu długości promienia lub pola.*

Uczeń otrzymuje ***2 punkty****, jeśli jego rozwiązanie stanowi co najmniej połowę poprawnego rozwiązania zadania, np.*

- *poprawnie obliczył kąty w trójkątach* BSC *i* SBA*, ale nie obliczył długości promienia koła,*
- *pomylił się obliczając kąty w trójkątach* BSC *i* SBA*, a następnie na podstawie błędnych miar kątów poprawnie obliczył promień i pole koła.*

Uczeń otrzymuje ***1 punkt****, jeśli jego rozwiązanie zawiera wartościowe elementy potrzebne do rozwiązania zadania, ale jest to mniej niż połowa rozwiązania, np.*

- *poprawnie uzasadnił równoramienność co najmniej jednego z trójkątów* BSC *i* SBA.