KONKURS Z MATEMATYKI
DLA UCZNIÓW SZKÓŁ PODSTAWOWYCH

ETAP WOJEWÓDZKI
KLUCZ ODPOWIEDZI

Część I - zadania krótkiej odpowiedzi

W zadaniach krótkiej odpowiedzi (zadania od 1 do 6) ocenie podlega jedynie odpowiedź, umieszczona przez ucznia w wyznaczonym miejscu arkusza. Za każde zadanie krótkiej odpowiedzi można uzyskać 2 punkty za poprawną odpowiedź. W niektórych zadaniach możliwe jest również przyznanie 1 punktu za niepoprawną odpowiedź, o ile jest ona wymieniona w poniższej tabeli (odpowiedzi te świadczą o prawidłowym sposobie postępowania ucznia, połączonym z drobnym błędem w obliczeniach lub rozumowaniu). Szczegółowe uzasadnienie takiej punktacji znajduje się pod przykładowymi rozwiązaniami poszczególnych zadań.

	Prawidłowa odpowiedź (2 punkty)	**Częściowo poprawna odpowiedź (1 punkt)**
Zadanie 1.	48	24 *lub* 30 *lub* 32 *lub* 36 *lub* 40 *lub* 44 *lub* 45 *lub* 46 *lub* 47 *lub* 49 *lub* 50 *lub* 51 *lub* 96
Zadanie 2.	$436cm^2$ *lub* 436	296 *lub* 331 *lub* 336 *lub* 366 *lub* 396 *lub* 476 *lub* 640 *lub* 736 *lub liczba naturalna różniąca się od* 436 *o co najwyżej* 10*, z jednostką (cm²) lub bez*
Zadanie 3.	32	15 *lub* 17
Zadanie 4.	$380cm$ *lub* 380	*liczba naturalna większa lub równa* 360*, mniejsza lub równa* 400 *i różna od* 380*, z jednostką (cm) lub bez, albo* $1710cm^2$
Zadanie 5.	46	*liczba naturalna większa od* 35*, mniejsza od* 57 *i różna od* 46
Zadanie 6.	10	12

Uwaga! Uczeń nie musi umieć uzasadnić poprawności rozumowania ani opisać jego szczegółów. Zadania krótkiej odpowiedzi dopuszczają rozumowania intuicyjne, metodę prób i błędów oraz inne sposoby prowadzące ucznia do uzyskania prawidłowego wyniku. Opisane poniżej przykładowe rozwiązania służą wyjaśnieniu poprawnych odpowiedzi umieszczonych w kluczu oraz stanowią materiał edukacyjny, do wykorzystania np. na kółku matematycznym.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIA

Zadanie 1.

Aby liczba była podzielna przez 12, musi być również parzysta. W takim razie wszystkie liczby spełniające warunki zadania będą zakończone cyfrą 2.

Do podzielności przez 12, konieczna jest podzielność liczby przez 4, a stąd przedostatnią cyfrą rozważanych liczb może być jedynie 3 lub 9, ponieważ 32 i 92 są podzielne przez 4, a 22 nie jest podzielne przez 4.

Warunkiem równoważnym podzielności przez 12 jest podzielność przez 3 i przez 4, dlatego teraz skupimy się na warunku podzielności przez 3.

Liczba jest podzielna przez 3, o ile suma jej cyfr jest podzielna przez 3. Ponieważ cyfry 3 i 9 są podzielne przez 3, reszta z dzielenia sumy cyfr rozważanej liczby przez 3 będzie równa reszcie z dzielenia sumy występującej w niej dwójek przez 3. W takim razie liczba spełniająca warunki zadania musi mieć wśród swoich cyfr trzy dwójki lub sześć dwójek. Tę drugą możliwość możemy odrzucić, ponieważ przedostatnia cyfra tej liczby jest różna od 2.

W takim razie możemy wybierać cyfry liczby spełniającej warunek zadania w następujący sposób:

- ostatnie dwie cyfry mogą tworzyć końcówkę 32 lub 92 (mamy dwie możliwości do wyboru),
- wśród pozostałych czterech cyfr muszą pojawić się dokładnie dwie dwójki, by liczba miała ich łącznie trzy (dwa miejsca z czterech możemy wybrać na $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$ sposobów),
- w każdym z dwóch pozostałych miejsc może być 3 lub 9 (dwukrotnie musimy dokonać wyboru jednej z dwóch możliwości).

Z zasady mnożenia, łączna liczba możliwości jest równa $2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 2 = 48$

Uwaga: część punktów przyznajemy za odpowiedzi, które wynikają z prawidłowego rozumowania (takiego jak przedstawione powyżej lub innego) połączonego z niewielkim błędem.

Zadanie 2.
Skoro wszystkie ściany boczne graniastosłupa są kwadratami, to wszystkie jego krawędzie są tej samej długości. W takim razie czworokąt stanowiący podstawę graniastosłupa musi być rombem.

Obliczymy długość boku tego rombu. Zauważmy, że skoro przekątne rombu przecinają się w połowie pod kątem prostym, to dzielą romb na cztery przystające trójkąty prostokątne o przyprostąkątnych 5cm i 7cm. Długość przeciwprostokątnej (a więc długość boku rombu) możemy oznaczyć przez c i obliczyć z twierdzenia Pitagorasa:

$(5\text{cm})^2 + (7\text{cm})^2 = c^2$

$25\text{cm}^2 + 49\text{cm}^2 = c^2$

$c = \sqrt{74}\text{cm}.$

Pole podstawy graniastosłupa możemy obliczyć korzystając ze wzoru na pole rombu:

$P_p = \frac{1}{2} \cdot 10\text{cm} \cdot 14\text{cm} = 70\text{cm}^2.$

Pole boczne graniastosłupa składa się z czterech kwadratów o bokach $\sqrt{74}\text{cm}$, jest więc równe

$P_b = 4 \cdot (\sqrt{74}\text{cm})^2 = 296\text{cm}^2.$

W takim razie pole całkowite graniastosłupa jest równe

$P_c = 2 \cdot 70\text{cm}^2 + 296\text{cm}^2 = 436\text{cm}^2.$

Uwaga: Główną trudnością zadania jest obliczenie krawędzi podstawy i obliczenie pola powierzchni bocznej. Przyznajemy część punktów za wyniki wynikające z typowych błędów obliczeniowych i typowych drobnych błędów w rozumowaniu.

Zadanie 3.
Oznaczmy liczby zawodników z drużyn Białych i Czerwonych odpowiednio przez b i c.

Na podstawie średnich uzyskanych przez każdą z drużyn możemy wywnioskować, że zawodnicy z drużyny Białych zdobyli łącznie $11b$ punktów, a zawodnicy z drużyny Czerwonych uzyskali w sumie $19c$ punktów. W takim razie wszyscy zawodnicy razem zdobyli $11b + 19c$ punktów. Zestawiając to z informacją o średniej liczbie punktów zdobytych w konkursie, otrzymujemy równanie:

$$\frac{11b + 19b}{b + c} = 15{,}25.$$

Po pomnożeniu obu stron równania przez $b + c$ i uproszczeniu, otrzymujemy kolejno:

$11b + 19b = 15{,}25b + 15{,}25c$

$3{,}75c = 4{,}25b$

$15c = 17b.$

Skoro b i c są liczbami naturalnymi, a liczby 15 i 17 są względnie pierwsze, to c musi być podzielne przez 17, czyli $c = 17k$ dla pewnego naturalnego k. Wówczas po wstawieniu do równania otrzymujemy również $b = 15k$. Łączną liczbę zawodników możemy opisać wyrażeniem $b + c = 32k$. W takim razie liczba zawodników w tym konkursie była podzielna przez 32 i jednocześnie mniejsza od 60, co oznacza, że była równa 32.

Uwaga: Część punktów przyznajemy za odpowiedzi równe liczbie zawodników w jednej z drużyn.

Zadanie 4.

Wiemy, że jedna z przyprostokątnych trójkąta prostokątnego ma długość 19cm. Oznaczmy długość drugiej przyprostokątnej przez b, a długość przeciwprostokątnej - przez c. Z twierdzenia Pitagorasa wiemy, że $(19\text{cm})^2 + b^2 = c^2$.

W kolejnych równaniach będziemy dla czytelności pomijać jednostki. Przekształcając naszą równość, otrzymujemy $19^2 = c^2 - b^2$, a korzystając z wzoru skróconego mnożenia, możemy zapisać tę równość w postaci $19^2 = (c - b)(c + b)$.

Ponieważ b i c są liczbami całkowitymi dodatnimi i $c > b$ (przeciwprostokątna jest zawsze dłuższa od przyprostokątnych), to również liczby $c - b$ oraz $c + b$ są całkowite dodatnie. Ponadto iloczyn tych liczby jest równy 19^2, a tę liczbę można przedstawić jako iloczyn dwóch liczb tylko na dwa sposoby: $19^2 = 1 \cdot 19^2$ lub $19^2 = 19 \cdot 19$. Ponieważ $c - b < c + b$, to możemy wywnioskować, że $c - b = 1$ oraz $c + b = 19^2 = 361$.

W takim razie obwód tego trójkąta jest równy

$19\text{cm} + b + c = 19\text{cm} + 361\text{cm} = 380\text{cm}.$

Uwaga: Uczeń może obliczyć długości wszystkich boków, ale nie jest to potrzebne do rozwiązania zadania. Istotną trudnością w zadaniu jest połączenie wiedzy geometrycznej (twierdzenie Pitagorasa) z własnościami liczb całkowitych (znalezienie możliwych rozkładów liczby 361 na dwa czynniki). Jeśli uczeń popełnił niewielki błąd rachunkowy, otrzymując całkowity wynik pomiędzy 360 a 400, uzyskuje część punktów. Za poprawną lub częściową odpowiedź uznajemy również odpowiednie liczby pozbawione jednostki. Część punktów przyznajemy również za podanie pola tego trójkąta (oznacza to, że uczeń pokonał najważniejszą trudność zadania, jaką jest wyznaczenie długości boków trójkąta, ale pomylił obwód z polem).

Zadanie 5.

Aby oszacować wartość wyrażenia $7\sqrt{5}+75$, zauważmy najpierw, że $7\sqrt{5}=\sqrt{245}$. Ponieważ $225<245<256$, to wiemy również, że $15<\sqrt{245}<16$. W takim razie $90<7\sqrt{5}+75<91$.

Teraz podobnie oszacujemy wartość wyrażenia $52-5\sqrt{2}$. Skoro $5\sqrt{2}=\sqrt{50}$ oraz $49<50<64$, to $7<5\sqrt{2}<8$. Stąd prawdziwa jest nierówność
$44<52-5\sqrt{2}<45$.

Łącząc oba oszacowania możemy wywnioskować, że liczby całkowite opisane w zadaniu to liczby całkowite od 45 do 90 włącznie. Jest ich $90-45+1=46$.

Uwaga: Część punktów przyznajemy za odpowiedź różniącą się o co najwyżej 10 od prawidłowej. Taki błąd może być spowodowane zbyt mało dokładnym oszacowaniem pierwiastków lub błędem przy zliczaniu liczb ze znalezionego zakresu.

Zadanie 6.

Oznaczmy przez a liczbę okrążeń, którą robi Adam w ciągu godziny, czyli w ciągu 60 minut. Pokonanie jednego okrążenia zajmuje Adamowi $\frac{60}{a}$ minut.

Bruno robi w ciągu godziny o 2 okrążenia więcej niż Adam, czyli $a+2$ okrążenia. W takim razie pokonanie jednego okrążenia zajmuje Brunowi $\frac{60}{a+2}$ minut.

Pokonanie jednego okrążenia zajmuje Adamowi o minutę dłużej niż Brunowi, co pozwala nam zapisać równanie:

$\frac{60}{a} - 1 = \frac{60}{a+2}.$

Przekształcając je w sposób równoważny (przy założeniu, że a jest liczbą dodatnią), otrzymujemy kolejno:

$\frac{60-a}{a} = \frac{60}{a+2},$

$(60-a)(a+2) = 60a,$

$60a + 120 - a^2 - 2a = 60a,$

$a^2 + 2a = 120,$

$a^2 + 2a + 1 = 121,$

$(a+1)^2 = 11^2.$

Ponieważ $a+1$ jest liczbą dodatnią, otrzymujemy $a+1 = 11$, czyli $a = 10$. To oznacza, że Adam wykonuje dziesięć okrążeń w ciągu godziny.

Odpowiedź: Adam wykonuje dziesięć okrążeń w ciągu godziny.

Część II - zadania otwarte

Zadanie 7. (0-4)

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

Wysokość trójkąta jest zawsze nie dłuższa niż boki trójkąta wychodzące z tego samego wierzchołka. Stąd wysokość trójkąta ABC o długości 24cm musi „sąsiadować” z bokami długości 25cm i 26cm. W takim razie ta wysokość jest spuszczona na bok o długości 17cm i możemy obliczyć pole trójkąta ABC:

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 17\text{cm} \cdot 24\text{cm} = 204\text{cm}^2.$$

Aby obliczyć szukane pola wycinka, od pola trójkąta musimy odjąć sumę pól wycinków kołowych, ponieważ wycinki te są rozłączne (każdy z boków jest większy niż dwa promienie po 6cm). Zauważmy, że kąty tych wycinków są jednocześnie kątami trójkąta, więc sumują się do 180°. W takim razie łączne pole wycinków jest takie samo, jak pole półkola o promieniu 6cm, czyli $\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (6\text{cm})^2 = 18\pi\text{cm}^2$.

W takim razie szukane pole jest równe $204\text{cm}^2 - 18\pi\text{cm}^2 = (204 - 18\pi)\text{cm}^2$.

Odpowiedź:
Pole tej części, która nie jest wycinkiem koła, jest równe $(204 - 18\pi)\text{cm}^2$.

Uwaga: W tym zadaniu uznajemy za poprawną również odpowiedź bez jednostki.

SCHEMAT OCENIANIA

Uczeń otrzymuje ***4 punkty****, jeśli za pomocą poprawnego rozumowania uzyskał prawidłowy wynik.*

Uczeń otrzymuje ***3 punkty****, jeśli popełnił jeden niewielki błąd w rozumowaniu lub obliczeniach, np.*

- *poprawnie ułożył wszystkie działania pozwalające na obliczenie szukanego pola, ale w jednym z obliczeń popełnił błąd obliczeniowy,*
- *obliczył poprawnie pole trójkąta i zauważył, że wycinki kołowe tworzą razem półkole, ale przy jego obliczaniu zapomniał o podzieleniu pola koła przez* 2,
- *poprawnie obliczył pole trójkąta, a pola wycinków kół obliczył przyjmując parami różne wartości kątów trójkąta, sumujące się do* 180°,
- *poprawnie obliczył pole trójkąta i sumę pól wycinków kołowych, ale nie obliczył szukanego pola (np. uważał, że wycinki kołowe na siebie nachodzą i obliczone wartości nie są wystarczające do zakończenia zadania),*
- *obliczył pole trójkąta zakładając, że wysokość długości* $24cm$ *jest spuszczona na bok trójkąta o długości* $25cm$ *lub* $26cm$*, a następnie na tej podstawie poprawnie dokończył rozwiązanie zadania.*

Uczeń otrzymuje ***2 punkty****, jeśli jego rozwiązanie stanowi co najmniej połowę poprawnego rozwiązania zadania, np.*

- *poprawnie obliczył sumę pól wycinków kołowych,*
- *poprawnie obliczył pole trójkąta.*

Uczeń otrzymuje ***1 punkt****, jeśli jego rozwiązanie zawiera wartościowe elementy potrzebne do rozwiązania zadania, ale jest to mniej niż połowa rozwiązania, np.*

- *poprawnie wybrał bok trójkąta, na który spuszczona jest wysokość długości* $24cm$,
- *obliczył pole trójkąta przy założeniu, że wysokość długości* $24cm$ *jest spuszczona na bok trójkąta o długości* $25cm$ *lub* $26cm$,
- *obliczył pola wycinków kół przyjmując parami różne wartości kątów trójkąta, sumujące się do* 180°.

Zadanie 8. (0-4)

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

Oznaczmy przez b liczbę białych kul w urnie. Na początku znajdowało się w niej $b+9$ kul czarnych, więc łączna liczba kul w urnie była równa $2b+9$. Prawdopodobieństwo wylosowania białej kuli było więc równe $P_1 = \frac{b}{2b+9}$.

Po dołożeniu 5 czarnych kul do urny, liczba kul białych nie uległa zmianie, ale łączna liczba kul była już równa $2b+14$. Stąd prawdopodobieństwo wylosowania białej kuli było równe $P_2 = \frac{b}{2b+14}$.

Po dołożeniu kolejnych 6 czarnych kul, łączna liczba kul wzrosła do $2b+20$, a tym samym prawdopodobieństwo wylosowania białej kuli zmalało do $P_3 = \frac{b}{2b+20}$.

Po uwzględnieniu zależności pomiędzy P_1, P_2 i P_3 danej w zadaniu, otrzymujemy równanie:

$$\frac{b}{2b+9} - \frac{b}{2b+14} = \frac{b}{2b+14} - \frac{b}{2b+20}.$$

Po podzieleniu obu stron przez b, sprowadzeniu każdej ze stron do wspólnego mianownika i uproszczeniu liczników, otrzymujemy

$$\frac{5}{(2b+9)(2b+14)} = \frac{6}{(2b+14)(2b+20)},$$

co po pomnożeniu obu stron równania przez $2b+14$ daje

$$\frac{5}{2b+9} = \frac{6}{2b+20}.$$

Po pomnożeniu obu stron równania przez $(2b+9)(2b+20)$ otrzymujemy

$10b + 100 = 12b + 54,$

a stąd $2b = 56$, czyli $b = 23$.

Odpowiedź: W urnie były 23 białe kule.

SCHEMAT OCENIANIA

*Uczeń otrzymuje **4 punkty**, jeśli za pomocą poprawnego rozumowania uzyskał prawidłowy wynik.*

*Uczeń otrzymuje **3 punkty**, jeśli popełnił jeden niewielki błąd w rozumowaniu lub obliczeniach, np.*

- *zapisał prawdopodobieństwa* P_1, P_2, P_3 *za pomocą wyrażeń zawierających jedną zmienną, a następnie ułożył prawidłowe równanie i poczynił istotny postęp w jego rozwiązywaniu, ale popełnił błąd przy jego rozwiązywaniu lub nie doprowadził rozwiązywania do końca.*

*Uczeń otrzymuje **2 punkty**, jeśli jego rozwiązanie stanowi co najmniej połowę poprawnego rozwiązania zadania, np.*

- *zapisał prawdopodobieństwa* P_1, P_2, P_3 *za pomocą wyrażeń zawierających jedną zmienną, a następnie ułożył prawidłowe równanie, ale nie poczynił istotnych postępów w jego rozwiązywaniu,*
- *błędnie zapisał prawdopodobieństwa* P_1, P_2, P_3 *za pomocą wyrażeń zawierających jedną zmienną (na przykład dzieląc liczbę kul białych przez liczbę kul czarnych) i na ich podstawie zapisał równanie o podobnej trudności do prawidłowego, a następnie je poprawnie rozwiązał.*

*Uczeń otrzymuje **1 punkt**, jeśli jego rozwiązanie zawiera wartościowe elementy potrzebne do rozwiązania zadania, ale jest to mniej niż połowa rozwiązania, np.*

- *zapisał prawdopodobieństwa* P_1, P_2, P_3 *za pomocą wyrażeń zawierających jedną zmienną, ale nie zapisał prawidłowego równania,*
- *zapisał, że prawdopodobieństwa* P_1, P_2, P_3 *są równe ilorazowi liczby białych kul i łącznej liczb kul w odpowiednich momentach, a odpowiednie liczby kul zapisał w postaci wyrażeń zawierających jedną zmienną,*
- *zapisał prawdopodobieństwa* P_1, P_2, P_3 *za pomocą wyrażeń zawierających jedną zmienną z niewielkim błędem (np. myląc założenie „kul białych było o 9 mniej niż kul czarnych” z „kul białych było o 9 więcej niż kul czarnych”), a następnie na ich podstawie zapisał równanie.*

Uwaga: uczeń nie otrzymuje punktów, jeśli zapisał prawdopodobieństwa P_1, P_2, P_3 *dzieląc liczbę kul białych przez liczbę kul czarnych i na ich podstawie zapisał równanie, ale go nie rozwiązał.*

Zadanie 9. (0-4)

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

Założenia:

- punkt D leży we wnętrzu kąta ostrego ABC,
- punkty K i L leżą odpowiednio na półprostych BA i BC,
- kąty BKD i BLD są proste.

Teza: $|\sphericalangle KBD| = |\sphericalangle KLD|$

Narysujmy okrąg o średnicy BD. Ponieważ kąty BKD i BLD są proste, punkty K i L leżą na tym okręgu, po dwóch stronach średnicy BD (średnica BD leży wewnątrz kąta, a więc pomiędzy jego ramionami). W takim razie kąty KBD i KLD są kątami wpisanymi w ten okrąg, opartymi na tym samym łuku KD. Z twierdzenia o kątach wpisanych otrzymujemy, że $|\sphericalangle KBD| = |\sphericalangle KLD|$, co należało dowieść.

Uwaga: Zadanie można również rozwiązać, dorysowując okrąg o średnicy BD, łącząc jego środek z punktami K i L oraz przeprowadzając obliczenia na kątach.

SCHEMAT OCENIANIA

*Uczeń otrzymuje **4 punkty**, jeśli za pomocą poprawnego rozumowania przeprowadził pełny dowód. Otrzymuje je również, jeśli nie wypisał wprost założeń i tezy, ale przeprowadzone rozumowanie jest poprawnym dowodem, wskazującym na zrozumienie przez ucznia roli założeń i tezy w zadaniu.*

*Uczeń otrzymuje **3 punkty**, jeśli popełnił jeden niewielki błąd w rozumowaniu lub obliczeniach, np.*

- *uczeń zauważył, że punkty K i L leżą na okręgu o średnicy BD, połączył ze środkiem okręgu i rozpoczął obliczenia na kątach, ale nie doprowadził ich do końca lub popełnił w nich błąd.*

*Uczeń otrzymuje **2 punkty**, jeśli jego rozwiązanie stanowi co najmniej połowę poprawnego rozwiązania zadania, np.*

- *uczeń zauważył, że punkty K i L leżą na okręgu o średnicy BD, ale nie wywnioskował z tego spostrzeżenia tezy,*
- *uczeń założył istnienie okręgu (w żaden sposób go nie uzasadniając) i na tej podstawie wywnioskował tezę.*

*Uczeń otrzymuje **1 punkt**, jeśli jego rozwiązanie zawiera wartościowe elementy potrzebne do rozwiązania zadania, ale jest to mniej niż połowa rozwiązania, np.*

- *uczeń wypisał założenia i tezę zadania oraz wykonał poprawny rysunek ilustrujący treść zadania,*
- *uczeń przeprowadził dowód w szczególnym przypadku, przy założeniu $|BK| = |BL|$.*