

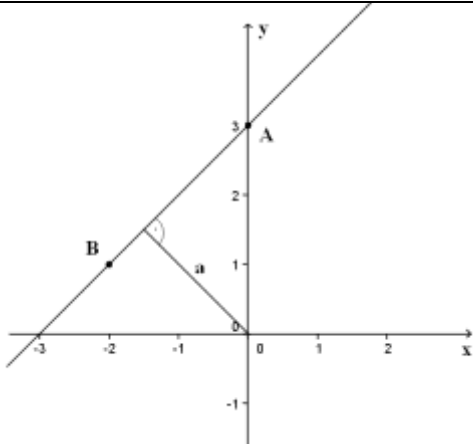
KONKURS MATEMATYCZNY DLA UCZNIÓW GIMNAZJUM

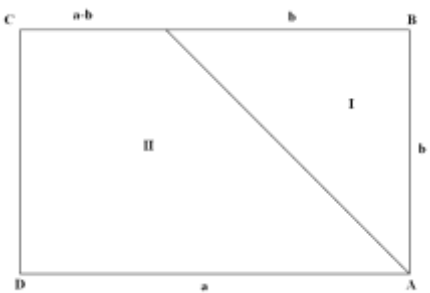
Klucz odpowiedzi do ETAPU WOJEWÓDZKIEGO

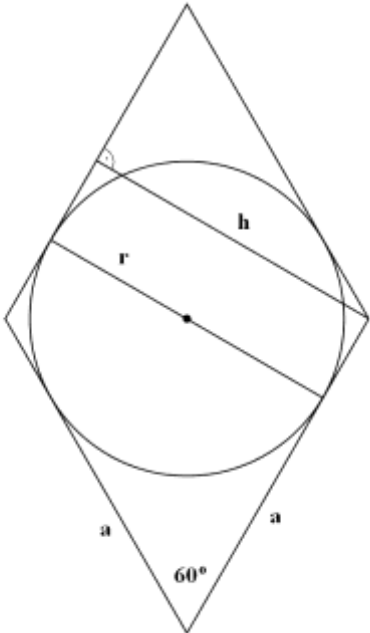
Arkusze zawiera tylko zadania otwarte, które należy ocenić według zamieszczonego poniżej klucza odpowiedzi.

Jeżeli uczeń poprawnie rozwiązał zadanie inną metodą niż podana w kluczu, a żadna nie była wskazana w tekście zadania, otrzymuje za to zadanie maksymalną liczbę punktów.

Zad.	Odpowiedzi	Liczba pkt.
1	x – masa bezpłatnego bagażu przewożona przez 1 osobę 94 – 2x – nadbagaż 2 osób 94 – x – nadbagaż 1 osoby analiza zadania	1
	Cena 1kg nadbagażu jest stała, stąd równanie: $\frac{15 + 20}{94 - 2x} = \frac{135}{94 - x}$ zapisanie równania	1
	$135(94 - 2x) = 35(94 - x) \quad : 5$ $27(94 - 2x) = 7(94 - x)$ $27 \cdot 94 - 7 \cdot 94 = 54x$ $20 \cdot 94 = 47x \quad : 47$ $20 \cdot 2 = x$ $x = 40$ rozwiązanie równania	1
	$\frac{15 + 20}{94 - 80} = \frac{35}{14} = \frac{5}{2} = 2,5$ Pasażer może bezpłatnie przewieźć 40 kg bagażu. Za 1 kg nadbagażu musi zapłacić 2,50 zł. odpowiedź końcowa	1
	Razem:	4 pkt.
2	x – cena 1 cebulki tulipana $\frac{15}{x}$ - il. cebulek, które można kupić za 15 zł 3 · 20 · x - wartość 3 paczek cebulek ustalenie danych początkowych	1

	$60 \cdot x = \frac{15}{x}$	zapisanie równania	1	
	$60x^2 = 15$ $x^2 = 0,25$ i $x > 0$ $x = 0,5$	rozwiązanie równania	1	
	$20 \cdot 0,5 = 10$ Jedna paczka cebulek tulipanów kosztuje 10 zł.	odповідь końcowa	1	
	Razem:		4 pkt.	
3			wykonanie rysunku i oznaczenie niewiadomej	1
	$y = x + 3$ $A(0, 3), B(-2, 1)$			
	a to odległość prostej od początku układu współrzędnych i jednocześnie przyprostokątna Δ prostokątnego równoramiennego o przeciwprostokątnej równej 3, więc $a\sqrt{2} = 3$		ustalenie niewiadomej i zapisanie równania	1
	$2a = 3\sqrt{2}$ $a = 1,5\sqrt{2}$ Odległość prostej od początku układu współrzędnych wynosi $1,5\sqrt{2}$		rozwiązanie równania i odповідь końcowa	1
	Razem:		3 pkt.	

	półprosta DB to dwusieczna kąta FDG, więc $ \angle FDB = 30^\circ$		1
	$\triangle FDB \sim \triangle CAB$ jako \triangle prostokątne o wspólnym kącie ostrym o wierzchołku B, \triangle powyższe mają kąty ostre o mierze 30° i 60°		1
	W $\triangle ABC$ mamy: $ BC = R - r$ $ AC = R + r$ oraz $ AC = (R - r)\sqrt{3}$	zapisanie zależności	1
	$R + r = (R - r)\sqrt{3}$ $r(1 + \sqrt{3}) = R(\sqrt{3} - 1)$ $\frac{r}{R} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$	wyznaczenie stosunku promieni	1
	$\frac{P_r}{P_R} = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \left(\frac{r}{R}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}\right)^2$	wyznaczenie stosunku pól kół	1
	Razem:		6 pkt.
6		wykonanie rysunku z oznaczeniami	
	$I : \frac{1}{3} \cdot 78cm = 26cm$ $II : \frac{2}{3} \cdot 78cm = 52cm$	- wyznaczenie długości I i II części obwodu uzyskanego z podziału dwusieczną kąta prostego	
	$2b = 26cm$ $b = 13cm$	- obliczenie długości boku b prostokąta ABCD	
	$a - b + b + a = 52$ $2a = 52$ $a = 26cm$	obliczenie długości boku a prostokąta ABCD	
	Razem:		4 pkt.

7	 <p>rysunek z oznaczeniami obrazujący podstawę walca wpisaną w romb</p>	1	
	$H = 3a$		
	$r = \frac{1}{2}h = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$	obliczenie promienia podstawy walca	1
	$V = \pi^2 H$ $V = \pi \left(\frac{a\sqrt{3}}{4} \right)^2 \cdot 3a$	zastosowanie poprawnej metody na obliczenie objętości walca	1
	$V = \pi \cdot \frac{a^2 \cdot 3}{16} \cdot 3a$ $V = \frac{9a^3 \pi}{16}$	uzyskanie wyniku końcowego	1
Razem:		4 pkt.	
8	$a = \frac{3 - \frac{3}{4} + \frac{3}{168}}{5 - \frac{5}{4} + \frac{5}{168}} = \frac{3(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{168})}{5(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{168})} = \frac{3}{5}(\text{cm})$	obliczenie długości boku a	1
	$b = \frac{202020}{252525} = \frac{20 \cdot 10101}{25 \cdot 10101} = \frac{4}{5}(\text{cm})$	obliczenie długości boku b	1
	$c = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\frac{4-3}{6}} = \frac{1}{6} \cdot 6 = 1(\text{cm})$	obliczenie długości boku c	1
	$c^2 = a^2 + b^2$ $1^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2$ $1 = \frac{9}{25} + \frac{16}{25}$ $1 = 1$	wykonanie obliczeń	1

	Na podstawie tw. odwrotnego do tw. Pitagorasa stwierdzamy, że Δ jest prostokątny	zapisanie uzasadnienia	1
		Razem:	5 pkt.
9	x – koszt ogrzewania domu $x - 20\% \cdot x = 80\% \cdot x = \frac{4}{5}x$	koszt ogrzewania po pierwszym usprawnieniu	1
	$75\% \cdot \frac{4}{5}x = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5}x = \frac{3}{5}x$	koszt ogrzewania po drugim usprawnieniu	1
	$45\% \cdot \frac{3}{5}x = \frac{9}{20} \cdot \frac{3}{5}x = 0,27x = 27\%x$	koszt ogrzewania po trzecim usprawnieniu	1
	$\frac{x - 0,27x}{x} = \frac{0,73x}{x} = 73\%$ Odp. Wydatki na ogrzewanie domu zmniejszyły się łącznie o 73%.	odpowiedź końcowa	1
		Razem:	4 pkt.
10	$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \cdot 2$ $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ $a+b - 2\sqrt{ab} \geq 0$	zapisanie nierówności równoważnych	1
	$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$	zastosowanie wzoru skróconego mnożenia	1
	Korzystając z założenia stwierdzamy, że dla $a \geq 0$ i $b \geq 0$ nierówność jest prawdziwa. Równość zachodzi dla $a=b$.	odpowiedź końcowa	1
		Razem:	3 pkt.
11	$a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ $\begin{cases} b - a = c - b \\ \frac{b}{a+1} = \frac{c}{b} \\ \frac{b}{a} = \frac{c+2}{b} \end{cases}$	ustalenie warunków początkowych	1
	$\begin{cases} 2b = a + c \\ b^2 = ca + c \\ b^2 = ca + 2a \end{cases}$	przekształcenie równań	1
	$\begin{cases} c = 2a \\ 2b = 3a \\ b^2 = ca + c \end{cases}$	po odjęciu stronami dwóch ostatnich równań z poprzedniego układu, uzyskujemy pierwsze równanie	1

$\begin{cases} c = 2a \\ a = \frac{2}{3}b \\ b^2 = 2a \cdot a + 2a = 2a(a + 1) = 2 \cdot \frac{2}{3}b \left(\frac{2}{3}b + 1 \right) \end{cases}$	wyznaczenie a i podstawienie do trzeciego równania	1
$\begin{aligned} b^2 &= \frac{4}{3}b \left(\frac{2}{3}b + 1 \right) \\ b &= \frac{4}{3} \left(\frac{2}{3}b + 1 \right) \end{aligned}$	przekształcanie trzeciego równania	1
$\begin{aligned} b &= \frac{8}{9}b + \frac{4}{3} \\ \frac{1}{9}b &= \frac{4}{3} \\ b &= \frac{4}{3} \cdot 9 = 12 \\ \begin{cases} a = 8 \\ b = 12 \\ c = 16 \end{cases} \end{aligned}$	wyznaczenie liczb a, b, c	1
$a + b + c = 36$ Odp. Suma liczb a, b, c jest kwadratem liczby całkowitej.	odpowiedź końcowa	1
Razem:		7 pkt.