KONKURS PRZEDMIOTOWY Z MATEMATYKI

DLA UCZNIÓW GIMNAZJUM

Klucz odpowiedzi do ETAPU WOJEWÓDZKIEGO

Zadania zamknięte:

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Poprawna odpowiedź	D	C	B	A	C	C	B	D	C	A

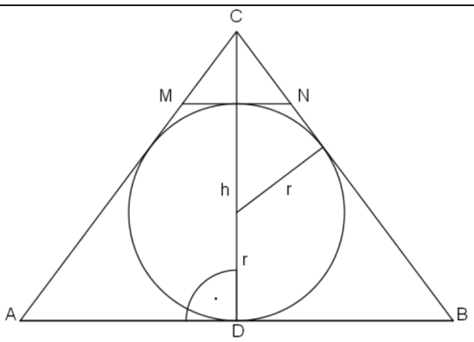
Zadania otwarte:

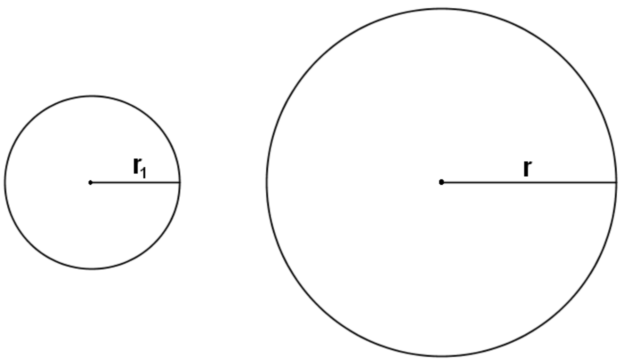
1. Zadania zostaną ocenione według zamieszczonego poniżej klucza odpowiedzi.

2. Jeżeli uczeń poprawnie rozwiązał zadanie inną metodą niż podana, otrzymuje maksymalną liczbę punktów za to zadanie.

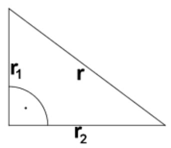
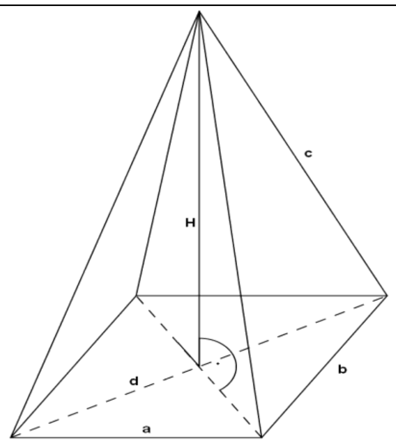
Zad.	Odpowiedzi		Liczba pkt.
11	$\begin{cases} \frac{c}{a+b} = 2 \\ \frac{c}{b-a} = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} c = 2a + 2b \\ c = 3b - 3a \end{cases}$	- doprowadzenie układu równań do postaci:	1
	$\begin{cases} c = 2a + 2b \\ 2a + 2b = 3b - 3a \end{cases}$ $\begin{cases} c = 2a + 2b \\ b = 5a \end{cases}$	- wyrażenie wielkości b za pomocą a	1
	$\begin{cases} c = 2a + 2 \cdot 5a \\ b = 5a \end{cases}$ $\begin{cases} c = 12a \\ b = 5a \end{cases}$	- wyrażenie wielkości c za pomocą a	1
	$a < b < c$	- uporządkowanie liczb	1
	UWAGA! Identyczne uporządkowanie otrzymuje się wtedy, gdy b i a wyrazi się za pomocą c, albo a i c za pomocą b.		
		Razem:	**4**
12	x, y - cyfry różne od zera x < y 10x + y - wiek Marka 10y + x - wiek Zenka	- analiza zadania	1
	k - liczba całkowita $(10y + x)^2 - (10x + y)^2 = k^2$	- zapisanie warunku	1
	$100y^2 + 20xy + x^2 - 100x^2 - 20xy - y^2 = k^2$ $99y^2 - 99x^2 = k^2$	- wykonanie przekształceń	1
	$99(y^2 - x^2) = k^2$ $99(y - x)(y + x) = k^2$	- zapisanie lewej strony równania w postaci iloczynu	1

	$9 \cdot 11 \cdot (y-x)(y+x) = k^2$ $3^2 \cdot 11 \cdot (y-x)(y+x) = k^2$	- przekształcenie lewej strony równania	1
	Z warunków zadania wynika, że iloczyn (y-x)(y+x) dzieli się przez 11, więc zachodzi układ równań: $\begin{cases} y+x=11 \\ y-x=1 \end{cases}$	- poprawne rozumowanie prowadzące do układu równań	1
	$\begin{cases} y=6 \\ x=5 \end{cases}$	- rozwiązanie układu równań	1
	Odp. Zenek ma 65 lat, a Marek 56 lat.	- ustalenie wieku Marka i Zenka	1
		Razem:	**8**
13	Z tabelki wynika, że do wykresu funkcji należą punkty: (1, -4) oraz (2, -1), a więc ich współrzędne spełniają równanie funkcji f(x) = ax + b		1
	Mamy wówczas: $\begin{cases} -4=a+b \\ -1=2a+b \end{cases}$	- zapisanie układu równań	1
	$\begin{cases} a=3 \\ b=-7 \end{cases}$	- rozwiązanie układu równań	1
	f(x) = 3x - 7	- zapisanie wzoru funkcji	1
	f(6) = 3 · 6 - 7 = 11	- obliczenie wartości funkcji dla argumentu 6	1
		Razem:	**5**
14	Jeżeli wartość bezwzględna wyrażenia |x - 3| - 7 jest równa 11, to |x - 3| - 7 = 11 lub |x - 3| - 7 = -11		1
	|x - 3| = 18 lub |x - 3| = -4	- przekształcenie równań	1

	x - 3 = 18 lub x - 3 = -18 x = 21 lub x = -15	- 1 punkt za każdy pierwiastek	2
	Równanie |x - 3| = -4 nie posiada rozwiązań; jest to równanie sprzeczne, bo lewa strona jest liczbą nieujemną		1
	Odp. Rozwiązaniem równania są liczby: 21 i -15.		1
		Razem:	**6**
15	 a = |AB| b = |AC| = |BC| h = |DC| c = |MN| r - dł. promienia okręgu wpisanego w ΔABC	- wykonanie poprawnego rysunku i wprowadzenie oznaczeń	1
	$\begin{cases} \frac{1}{2} \cdot a \cdot h = 48 \\ \frac{a}{h} = \frac{3}{2} \end{cases}$	- zapisanie układu równań	1
	$\begin{cases} h = 8 \\ a = 12 \end{cases}$	- po 1 punkcie za obliczenia h oraz a	2
	$6^2 + 8^2 = b^2$ $b = 10$	- obliczenie długości b z twierdzenia Pitagorasa	1

<table>
<tr><td></td><td>$\frac{1}{2}\cdot r\cdot(a+2b)=48$
$\frac{1}{2}\cdot r\cdot(12+2\cdot 10)=48$
$r=3$</td><td>- obliczenie promienia okręgu wpisanego w trójkąt ze wzoru na pole trójkąta</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>ΔABC ~ ΔMNC - c. kk, więc
$\frac{h}{a}=\frac{h-2r}{c}$
$\frac{8}{12}=\frac{8-6}{c}$
$8c=24$
$c=3$
Odp. Długość odcinka MN jest równa 3.</td><td>- obliczenie długości odcinka |MN|</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Razem:</td><td>7</td></tr>
<tr><td>16</td><td>

$r > r_1$
r_2 - promień szukanego koła
$P = \pi r^2$
$P_1 = \pi r_1^2$
$P_2 = \pi r_2^2$</td><td>- wykonanie rysunków wyjściowych kół, wprowadzenie oznaczeń oraz zapisanie wzorów na pole powierzchni poszczególnych kół</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>$P_2 = \pi r^2 - \pi r_1^2 = \pi (r^2 - r_1^2)$</td><td>- zapisanie zależności</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>$\pi r_2^2 = \pi (r^2 - r_1^2)$
$r_2^2 = r^2 - r_1^2$</td><td>- zapisanie i przekształcenie równania</td><td>1</td></tr>
</table>

	 	- wykonanie rysunku, wyznaczenie r_2	1
	Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa. Budujemy trójkąt prostokątny o przyprostokątnej r_1 i przeciwprostokątnej r; r_2 to druga przyprostokątna.	- uzasadnienie poprawności rozwiązania	1
	Odp. Warunki zadania spełnia koło o promieniu r_2 .	-odpowiedź i narysowanie koła o promieniu r_2	1
		Razem:	**6**
17	 a = 8cm, b = 6cm $\frac{c}{d}=\frac{2}{1}$ (d - długość całej przekątnej podstawy)	- wykonanie rysunku i wprowadzenie oznaczeń	1
	$d=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$	- obliczenie długości przekątnej podstawy	1
	$\frac{c}{d}=\frac{2}{1}$ $c=2d=2\cdot 10=20$	- obliczenie długości krawędzi bocznej	1

$H^2 + \left(\frac{1}{2}d\right)^2 = c^2$ $H = \sqrt{c^2 - \left(\frac{1}{2}d\right)^2}$ $H = \sqrt{20^2 - 5^2} = \sqrt{375}$ $H = 5\sqrt{15}$	- obliczenie długości wysokości ostrosłupa	1
Możliwe jest umieszczenie w tym ostrosłupie stożka o podanej wysokości, bo $0{,}1\sqrt{36015} = 4{,}9\sqrt{15}$ $4{,}9\sqrt{15} < 5\sqrt{15}$	- poprawne uzasadnienie dotyczące wysokości	1
Największa długość promienia podstawy stożka może wynosić 3cm.	- poprawna odpowiedź	1
	Razem:	**6**