KONKURS MATEMATYCZNY
KLUCZ ODPOWIEDZI
ETAP Wojewódzki

Zadania zamknięte

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
C	A	D	D	A	D	C	C	C	D

11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.
P P F	F P P	P F P	P F F	P F P F	F P P P	F P P P

Zadania otwarte

Zadanie 18

Sprowadzamy obie strony do wspólnego mianownika dla x>0 i y>0:

$$L = \frac{y-x}{y} \cdot \frac{y-x}{x} = \frac{y^2 - 2xy + x^2}{xy}$$ ***1 pkt***

$$P = \frac{y-x}{x} - \frac{y-x}{y} = \frac{y^2 - xy - xy + x^2}{xy} = \frac{y^2 - 2xy + x^2}{xy}$$ ***1 pkt***

Stwierdzamy równość obu stron L=P, a następnie z udowodnionej równości podajemy przykłady czterech par liczb (*a,b*) gdzie:

$a = \frac{y-x}{y}$ oraz $b = \frac{y-x}{x}$

Za każde dwie poprawnie podane pary po **1 punkcie**.
Jeżeli uczeń wskazuje szukane pary bez udowodnienia równości (lub dowód zawiera błędy) to za całe zadanie może otrzymać maksymalnie 2 punkty.

Zadanie 19

Przekształcamy sumę potęg według schematu:

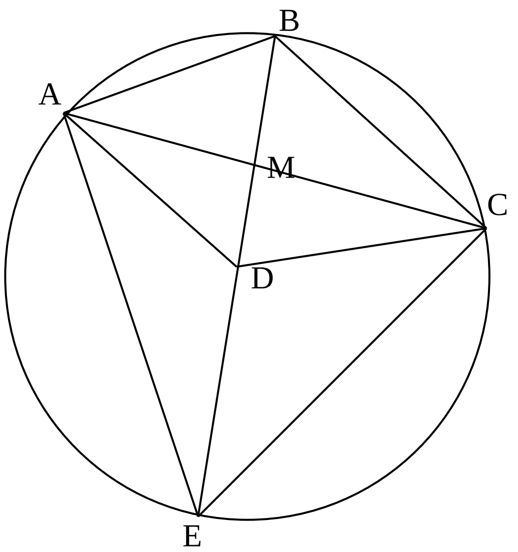
$5 + 5^2 + 5^3 + \ldots + 5^{299} + 5^{300} = (5+5^2) + (5^3+5^4) + \ldots + (5^{299}+5^{300}) =$ **2pkt.**

$5(1+5) + 5^3(1+5) + \ldots + 5^{299}(1+5) = (1+5)[5 + 5^3 + \ldots + 5^{299}] =$ **2pkt.**

$6 \cdot 5 \cdot \underbrace{(1+5^2+\ldots+5^{298})}_{\text{ozn. } p \in N} = 30 \cdot p$, co oznacza tezę. **2pkt.**

Uwagi:
- jeśli uczeń wyłączył 5 przed nawias - otrzymuje 1 punkt
- jeśli uczeń napisał, że liczba jest podzielna przez 30, gdy dzieli się przez 2,3,5 (lub 10 i 5) i UZASADNIŁ podzielność przez 2 i 5 (lub 10) - otrzymuje 4 punkt
- jeśli uczeń napisał, że liczba jest podzielna przez 30, gdy dzieli się przez 2,3,5 (lub 10 i 5) i UZASADNIŁ podzielność przez 2 i 5 (lub 10) oraz ZAUWAŻYŁ (np.: sprawdził na kilku czynnikach, ale nie przeprowadził ogólnego rozumowania), że suma dwóch kolejnych czynników jest podzielna przez 3 , a takich czynników będzie parzysta liczba - otrzymuje 5 punktów.

Zadanie 20



Z treści zadania :
$\angle BAC = 20^o$, $\angle BCA = 35^o$,
$\angle BDC = 40^o$, $\angle BDA = 70^o$.

Z obliczeń :
$\angle DEA = 35^o$, $\angle DAE = 35^o$.

Opisujemy na ΔABC okrąg, prosta *BD* przecina okrąg w punkcie *E*. **2pkt.**
W ΔDEC : $\angle DEC = 20^o$, a kąt zewnętrzny przy wierzchołku *D* ma miarę 40^o.
$\angle DCE = 20^o$ i *DE = DC*.
Analogicznie dowodzimy, że *DE = DA*. **2pkt.**
Zatem *D* jest środkiem okręgu opisanego ΔABC, więc :

$\angle DCA = \frac{1}{2}(180^\circ - 110^\circ) = 35^\circ$

$\angle BMC = 40^o + 35^o = 75^o$

$\angle CMD = 180^o - 75^o = 105^o = \angle AMB.$ **2pkt.**