KONKURS PRZEDMIOTOWY Z MATEMATYKI
DLA UCZNIÓW GIMNAZJUM

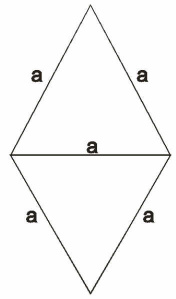
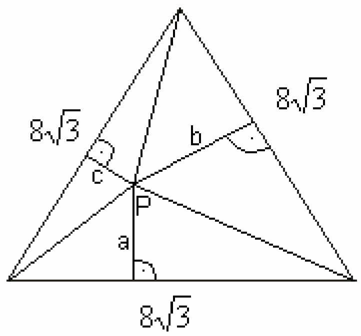
Klucz odpowiedzi do ETAPU WOJEWÓDZKIEGO

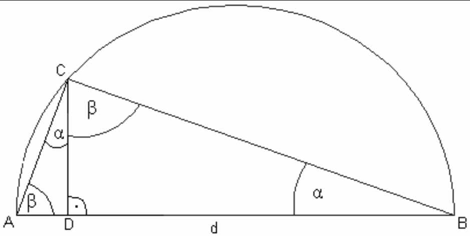
Zadania otwarte:

1. Jeżeli uczeń popełnił błąd w obrębie jednego z kryterium, to otrzymuje za to kryterium 0 punktów.
2. Jeżeli uczeń pomimo tego błędu, tok rozumowania ma poprawny, to otrzymuje dalsze punkty zgodnie z kryteriami.
3. Jeżeli uczeń poprawnie rozwiązał zadanie inną metodą niż podana, otrzymuje maksymalną liczbę punktów za to zadanie.

Zad.	Odpowiedzi		Liczba pkt.
1	x=2 więc $5(a+3\cdot 2)(2+1) - 4(1+2\cdot 2)^2 = 80$	- zapisanie równania	1
	$15a + 90 - 100 = 80$ $a = 6$	- rozwiązanie równania	1
		Razem:	**2 pkt.**
2	x = 75%y	- zapisanie zależności	1
	$\frac{y}{x}\cdot 100\% = \frac{y}{75\% y}\cdot 100\%$	- zapisanie zależności	1
	$\frac{100}{75}\cdot 100\% = \frac{4}{3}\cdot 100\% = 133\frac{1}{3}\%$	- wynik końcowy	1
		Razem:	**3 pkt.**
3	0 = 2x + b, więc x = $-\frac{b}{2}$	- obliczenie miejsca zerowego pierwszej funkcji	1
	0 = ax + 3, więc x = $-\frac{3}{a}$	- obliczenie miejsca zerowego drugiej funkcji	1
	$-\frac{b}{2} = -\frac{3}{a}$, więc a · b = 6	- wyznaczenie zależności pomiędzy liczbami a i b	1
	(2,3); (3,2); (6,1); (1,6)	- podanie czterech prawidłowych par liczb całkowitych spośród ośmiu par stanowiących rozwiązanie zadania	1
	(-2,-3); (-3,-2); (-6,-1); (-1,-6)	- podanie pozostałych czterech par liczb całkowitych	1
		Razem:	**5 pkt.**

4			
	Wystarczy pokazać że: a · b = 1 $a \cdot b = \sqrt{4-\sqrt{15}} \cdot \sqrt{4+\sqrt{15}}$	- zapisanie iloczynu	1
	$= \sqrt{\left(4-\sqrt{15}\right)\cdot\left(4+\sqrt{15}\right)}$	- wykorzystanie własności pierwiastków	1
	$= \sqrt{4^2-15} = \sqrt{1} = 1$	- końcowy wynik	1
		Razem:	**3 pkt.**
5	s – długość trasy w km v – prędkość pociągu w km/h $\frac{s}{v}$ - czas potrzebny na pokonanie trasy $40\,\text{min} = \frac{2}{3}h$ - różnica czasu po zwiększeniu prędkości	- wprowadzenie oznaczeń	1
	$\begin{cases} \frac{s}{v} - \frac{s}{v+10} = \frac{2}{3} \\ \frac{s}{v-10} - \frac{s}{v} = 1 \end{cases}$	- zapisanie poprawnego układu równań (po 1 pkt. za każde równanie)	2
	$\begin{cases} \frac{sv+10s-vs}{v^2+10v} = \frac{2}{3} \\ \frac{sv-sv+10s}{v^2-10v} = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} 30s = 2v^2+20v \\ 10s = v^2-10v \end{cases}$ $\begin{cases} 30s = 2v^2+20v \\ -30s = -3v^2+30v \end{cases}$ Po dodaniu stronami mamy: $0 = -v^2+50v$	- doprowadzenie układu do równania kwadratowego	1
	$v(v-50) = 0$ $v = 0 \,\text{lub}\, v = 50$	- obliczenie prędkości pociągu równej 50 km/h (uczeń może zauważyć że v=0 nie spełnia warunków zadania)	1
	$s = \frac{v^2-10v}{10}$ $s = \frac{2500-500}{10} = 200$	- obliczenie długości trasy równej 200 km	1
		Razem:	**6 pkt.**
6	$\left(\frac{2}{5}\right)^{3x-5} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-(5x-3)}$	- doprowadzenie potęg do tej samej podstawy	1
	3x – 5 = – (5x – 3)	- zapisanie równania	1
	x = 1	- poprawne rozwiązanie równania	1

<table>
<tr><td></td><td colspan="2" align="right">Razem:</td><td>3 pkt.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">7</td><td>
</td><td>- wykonanie rysunku, wprowadzenie oznaczeń i zauważenie, że krótsza przekątna dzieli romb na dwa trójkąty równoboczne, każdy o polu równym 1 cm^2</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
$P = 1$
$a^2 = \frac{4}{\sqrt{3}}$
$a = \frac{2}{\sqrt[4]{3}}$</td><td>- obliczenie boku rombu</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$a = \frac{2 \cdot \sqrt[4]{27}}{\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{27}} = \frac{2\sqrt[4]{27}}{3}$</td><td>- usunięcie niewymierności z mianownika</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="right">Razem:</td><td>3 pkt.</td></tr>
<tr><td rowspan="5">8</td><td>
</td><td>- wykonanie rysunku, wprowadzenie oznaczeń</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$P = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{3} \cdot a + \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{3} \cdot b + \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{3} \cdot c$
$P = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{3} \cdot (a+b+c)$
$P = 4\sqrt{3} \cdot (a+b+c)$</td><td>- wyznaczenie pola trójkąta równobocznego jako sumy pól trzech trójkątów o wspólnym wierzchołku w punkcie P</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$P = \frac{(8\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$
$P = 48\sqrt{3}$</td><td>- obliczenie pola trójkąta równobocznego</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$4\sqrt{3}(a+b+c) = 48\sqrt{3}$
$a+b+c = 12$</td><td>- wyznaczenie sumy odległości punktu P od boków trójkąta</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="right">Razem:</td><td>4 pkt.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="7">9</td><td>d – średnica koła – szerokość tunelu
|AD| = 1 m
|CD| = 3 m</td><td>- wykonanie rysunku, wprowadzenie oznaczeń, zapisanie danych</td><td>1</td></tr>
<tr><td>kąt ACB jako kąt wpisany oparty na średnicy okręgu jest kątem prostym, więc Δ ABC jest prostokątny</td><td>- uzasadnienie że Δ ABC jest prostokątny</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Δ ABC – prostokątny
Δ ADC – prostokątny
Δ ABC ~ Δ ADC na podstawie cechy kkk (oba trójkąty mają przynajmniej po jednym kącie ostrym równym)</td><td>- poprawne uzasadnienie podobieństwa trójkątów prostokątnych (zaznaczenie na rysunku lub zapisanie kątów o tej samej mierze)</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$|AC|^2 = |AD|^2 + |CD|^2$
stąd
$|AC| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$</td><td>- obliczenie $|AC|$ z twierdzenia Pitagorasa</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|AB|}$
$\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|AC|}{d}$</td><td>- zapisanie proporcji</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{d}$
$d = 10$</td><td>- obliczenie szerokości tunelu</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="right">Razem:</td><td>6 pkt.</td></tr>
</table>